熱流と量子効果の関係

電気通信大学　情報理工学研究科
JSTさきがけ
田島裕康

本講演のテーマ

量子開放系における

保存量の流れ $\Longleftrightarrow$ ダイナミクスの不可逆性

の関係に、量子効果はどう影響するか？

本講演のテーマ

一般に、「保存量の流れ」は「エントロピー増大」を生む

例：発熱と電流量 $W = RI^2$

近年、こうした関係をより一般的にとらえた様々なトレードオフ関係が、統計物理で導出されている

Barato, Seifert, PRL 2015
Shiraishi, Saito, Tasaki, PRL 2016
Shiraishi, Tajima PRE, 2017
Shiraishi, Funo, Saito, PRL, 2018
Funo, Shiraishi Saito, NJP, 2019
Ito, Andreas, PRX 2020

大まかに言えば、

$$\text{エントロピー増大量} \times A \geq \text{流れの大きさ}^2$$

熱力学第二法則（エントロピー増大≧0）のある種のrefinements

本講演のテーマ

この関係は、より俯瞰してみると、以下のトレードオフとみなせる

保存量の流れ ⟷ ダイナミクスの不可逆性

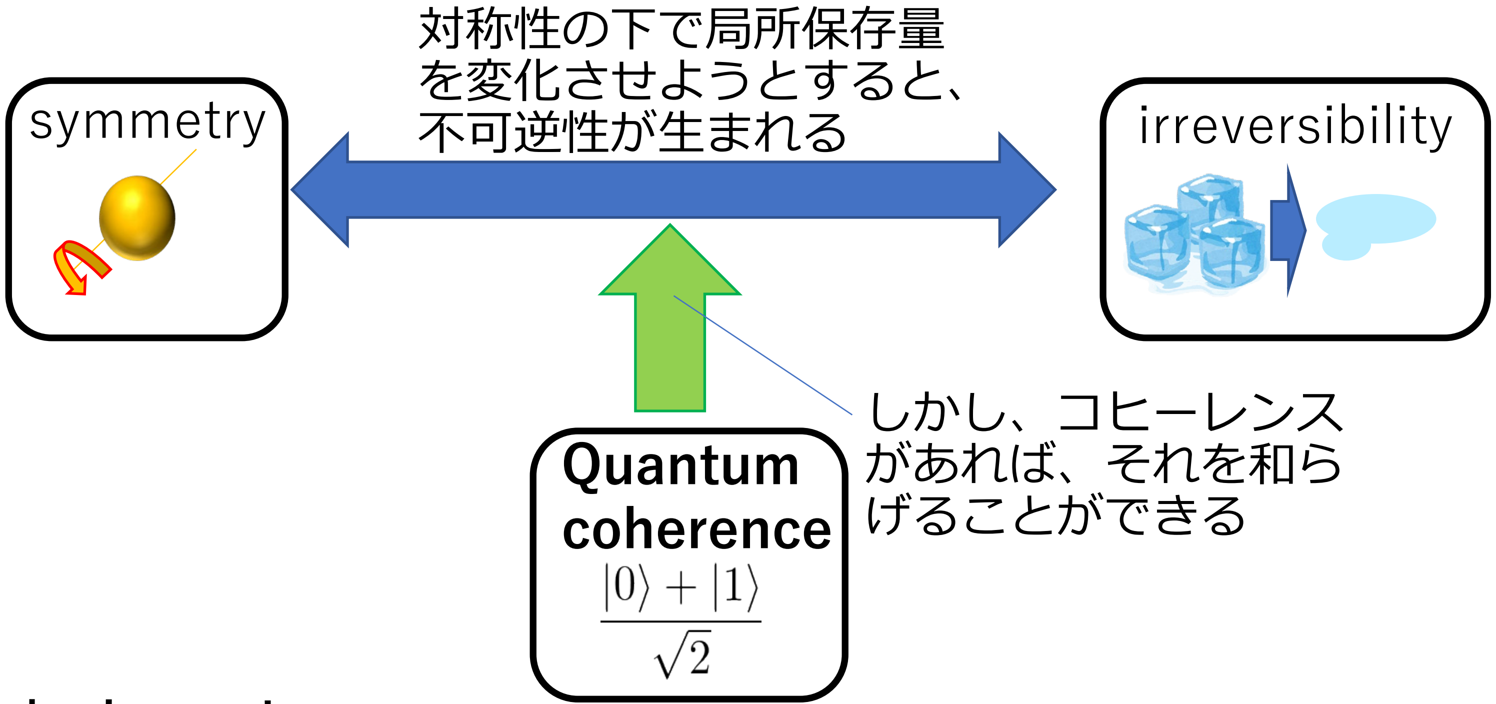
一方、こうしたトレードオフが成立するのは実は熱力学的対象に限らない

そして、それぞれの例を見ていくと、このトレードオフには量子効果が興味深い形で関係してくることが分かる

目標：この構造を統一的に理解すること

本講演のテーマ

現在の状況は発展途上だが、大まかに以下のような構造が得られている：



現在までに得られたこと：

・マスター方程式で記述できるような系での、上記構造の（ある程度）統一的な理解

➡「散逸のない熱流」の発見と、それにともなう熱機関の性能向上法の提案

・より一般的なCPTP-mapでの、上記構造を表す単一の不等式の導出

➡誤り訂正・測定・量子ゲート実装・ブラックホール・熱力学的過程に適用可能

関連する論文と共同研究者

・マスター方程式で記述できるような系での、上記構造の（ある程度）統一的な理解

➡「散逸のない熱流」の発見と、それにともなう熱機関の性能向上法の提案

H.Tajima and K. Funo, Phys. Rev. Lett. **127**, 190604 (2021)
Editor's suggestion +Featured in Physics

解説記事: 日本物理学会誌 **77**, 621 (2022)

・より一般的なCPTP-mapでの、上記構造を表す単一の不等式の導出

➡誤り訂正・測定・量子ゲート実装・ブラックホール・熱力学的過程に適用可能

H. Tajima and K. Saito arXiv:2103.01876 (2021)

H. Tajima, R. Takagi and Y. Kuramochi arXiv:2206.11086 (2022)

QIP talk in 2023

ここからの構成

背景：熱力学、測定過程、量子計算、誤り訂正の類似する(しかし別個の)定理たち

提案：対称性・不可逆性・量子性の普遍的トレードオフ構造

結果1：マスター方程式系における結果

・流速・散逸トレードオフへの量子コヒーレンスの影響
・散逸なし熱流と、それを用いた熱機関の性能向上法の構成

結果2：より一般の系における統一的不等式

・対称性・不可逆性・量子性の間のトレードオフ不等式
・Wasserstein距離を介したブラックホールスクランブリングへの適用

展望：まとめと今後の展望

背景：様々な対称性と不可逆性のトレードオフ

不可逆性は、これまで多くの分野で問題になってきた。

最初の例として挙げるべきは、やはり熱力学第二法則：

$$\Delta S \geq 0$$

先ほど述べたように、この不等式はある種のrefinementが可能であるということが理解されつつある。例えば古典master eqで記述される範囲で

$$\dot{\sigma} \times \Theta \geq J^2$$

N. Shiraishi, K. Saito, and H. Tasaki
Phys. Rev. Lett. **117**, 190601

Refinementは、「保存量の流れと」「不可逆性」のトレードオフになっている。

背景：様々な対称性と不可逆性のトレードオフ

一方、量子情報処理においては、保存則や対称性が情報処理の「正確性」を制限するという事実が古くから知られていた。

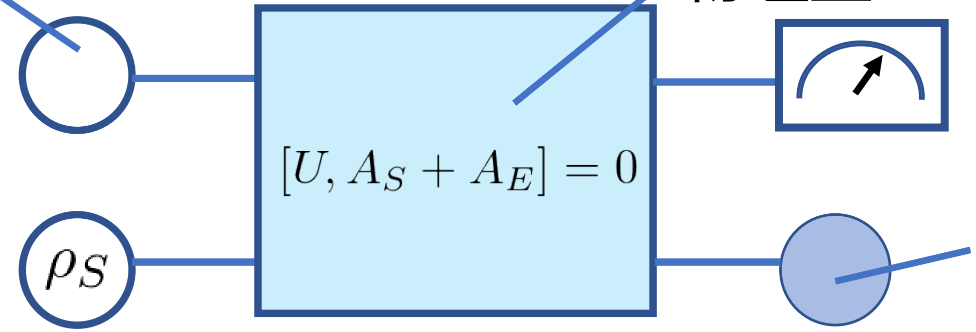
例えば、量子測定に対しては、以下の結果が成立することが知られている：

定理:Wigner-Araki-Yanase-Ozawa

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 88 050402 (2002).

保存量A_Eの分散がδに反比例して必要になる

物理量Aについての保存則のもとで



Aと非可換な物理量Bを誤差 δで測定するには

d-level system

・**1952~1960年に成立したWigner-Araki-Yanase(WAY)定理の拡張**

「誤差」と「保存量の分散」の間のトレードオフ

SIQ定理の量子情報処理への応用

こうしたトレードオフが存在するのは測定だけではない：

Measurement：WAY定理

反比例：（任意測定）

測定誤差⇔測定実装に必要なコヒーレンス

E. P. Wigner, Z. Phys. 133, 101 (1952).
H. Araki and M. M. Yanase, Phys. Rev.120, 622 (1960).
M. M. Yanase, Phys. Rev. 123, 666 (1961).

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 88, 050402 (2002).

H. Tajima and H. Nagaoka, arXiv:1909.02904 (2019)

Unitary gates：ユニタリーWAY定理

反比例：（任意ユニタリー）

実装誤差⇔ゲート実装に必要なコヒーレンス

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 89, 057902 (2002).
H. Tajima, N. Shiraishi and K. Saito,　Phys. Rev. Lett. 121, 110403 (2018).
H. Tajima, N. Shiraishi and K. Saito,Phys. Rev. Research. 2, 043374 (2020).

Error correction：Eastin-Knill定理

反比例：（任意トランスバーサル符号）

復号誤差⇔符号に必要なqubit数

B. Eastin and E. Knill, Phys. Rev. Lett. 102, 110502 (2009).
P. Faist, S. Nezami, V. V. Albert, G. Salton, F. Pastawski, P. Hayden, and J. Preskill, Phys. Rev. X 10, 041018 (2020).

これらは全て、共通する形の不等式で記述される

$$\text{誤差} \geq \frac{\text{係数}}{(\text{リソース} + \text{定数})}$$

熱力学と情報処理：共通する制限

測定・ユニタリー・誤り訂正に共通する制限：

$$\text{誤差} \geq \text{係数}/(\text{リソース} + \text{定数})$$

第二法則のrefinement

$$\dot{\sigma} \geq J^2/\Theta$$

誤差∊不可逆性と考えると、非常に似た構造を持っていることが分かる

測定
測定の誤差は情報損失=不可逆性

ユニタリー
ユニタリーの誤差は不可逆性

誤り訂正
復号誤差も不可逆性

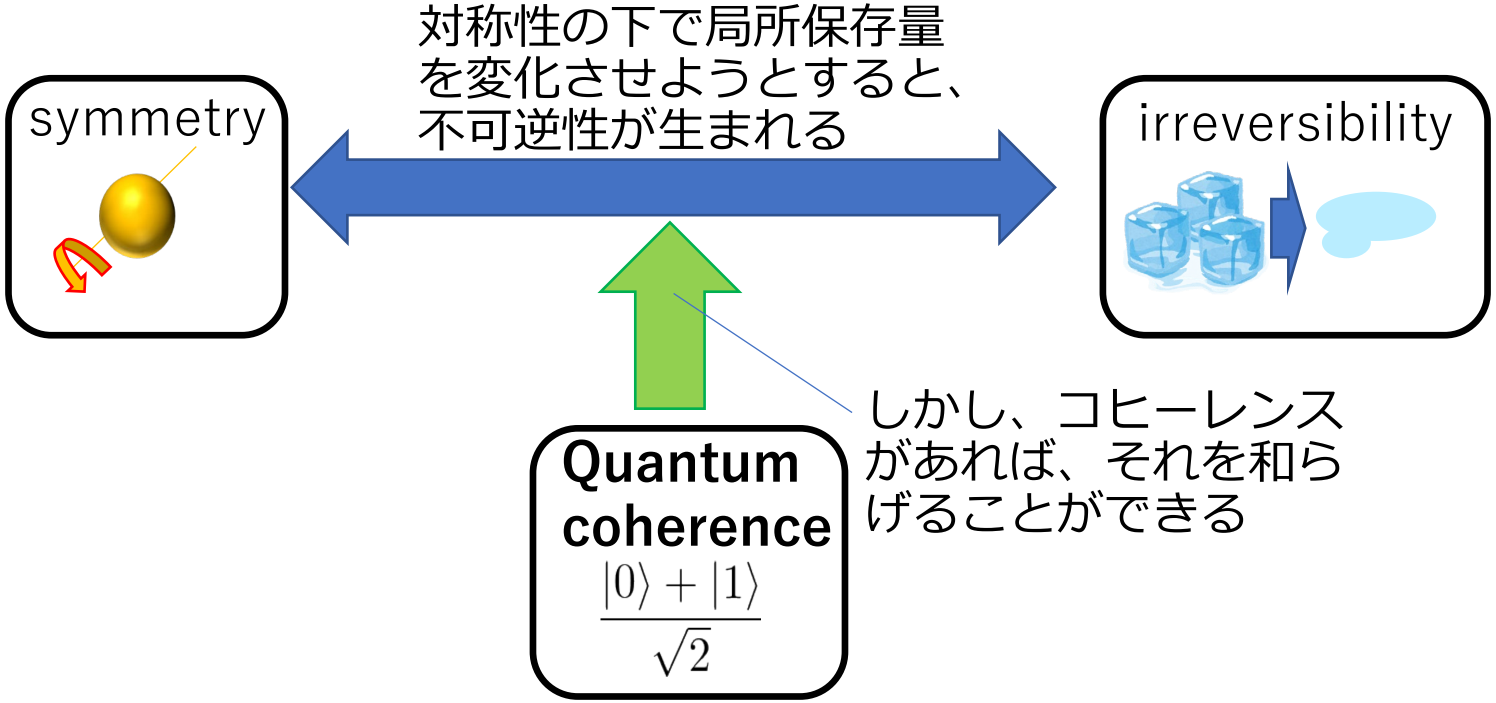
Question: 対称性の下では、不可逆性とコヒーレンスの間に普遍的なトレードオフ構造があるのではないか？

提案：対称性・不可逆性・量子性の間のトレードオフ構造

予想：以下のような構造が存在する

$$\text{不可逆性} \geq \frac{\text{局所保存量変化}}{(\text{コヒーレンス} + \text{定数})}$$

意味としては、以下のような形になる：



以降、現在までに得られている結果を述べる。

ここからの構成

☑ **背景**：熱力学、測定過程、量子計算、誤り訂正の類似する(しかし別個の)定理たち

☑ **提案**：対称性・不可逆性・量子性の普遍的トレードオフ構造

結果1：マスター方程式系における結果

・流速・散逸トレードオフへの量子コヒーレンスの影響
・散逸なし熱流と、それを用いた熱機関の性能向上法の構成

結果2：より一般の系における統一的不等式

・対称性・不可逆性・量子性の間のトレードオフ不等式

・Wasserstein距離を介したブラックホールスクランブリングへの適用

展望：まとめと今後の展望

結果1:マスター方程式系における結果

目標：系がマスター方程式に従うような状況で、

$$\text{不可逆性} \geq \frac{\text{局所保存量変化}}{(\text{コヒーレンス} + \text{定数})}$$

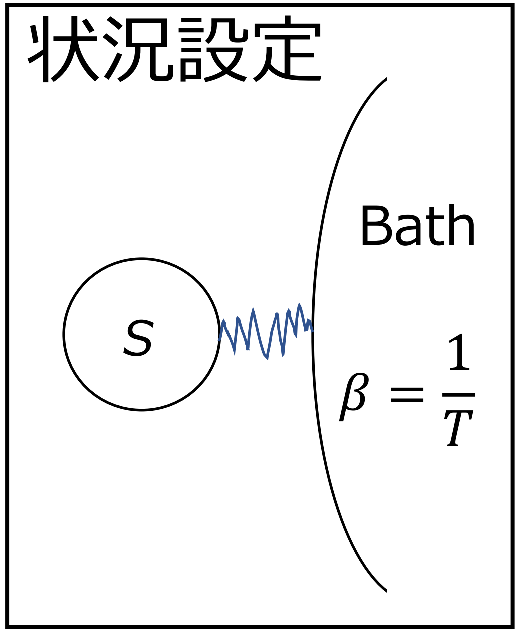
を導く

・特徴：
外部系の緩和が早く、かつ外部にはエネルギーの量子揺らぎがない

このような状況下で結果を導き、
どのような応用が得られるかを見る。

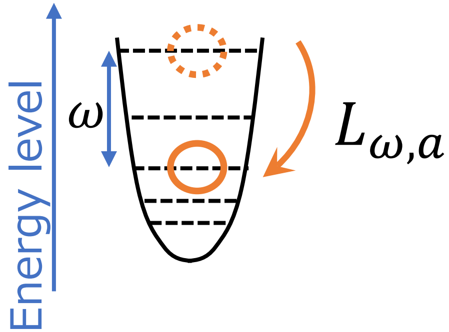
Set up

標準的な量子マスターeqに従う系を考える



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[H, \rho] + \mathcal{D}[\rho].$$

$$\mathcal{D}[\rho] = \sum_{\omega, a} \gamma_a(\omega) \left(L_{\omega,a} \rho L_{\omega,a}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{L_{\omega,a}^{\dagger} L_{\omega,a}, \rho\} \right).$$



$$L_{\omega,a} := \sum_{e} \Pi_{e-\omega} L_a \Pi_e$$

Π_e *は、エネルギー固有値eの固有空間への射影.*

Heat currentとエントロピー生成も、標準的な形で定義する

$$J(\rho) := [H\mathcal{D}[\rho]],$$

$$\dot{\sigma}(\rho) := \dot{S}(\rho) - \beta[H\mathcal{D}[\rho]].$$

コヒーレンスのない状態2種類

$$\rho_{\mathrm{bd}} := \sum_{e} \Pi_e \rho \Pi_e \qquad\qquad \rho_{\mathrm{sd}} := \sum_{e,i} \Pi_{e,i} \rho \Pi_{e,i}$$

Π_e *は、エネルギー固有値eの固有空間への射影.*

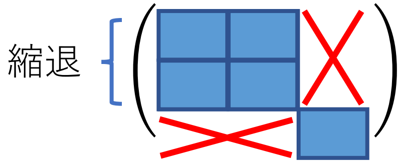
$\Pi_{e,i}$*は、エネルギー固有値eの固有状態のうち、i番目のものへの射影*

大雑把に言うと、

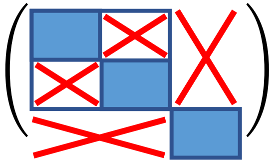
ρ_{bd} :非縮退間のコヒーレンスのない状態

ρ_{sd} :全コヒーレンスがない状態

ρ_{bd} :Block-Diagonal



ρ_{sd} :Strictly-Diagonal



コヒーレンスの量はl_1-コヒーレンスノルムを用いて量る：

$$C_{l_1}(\rho) := \sum_{(e,i)\neq(e',i')} |\langle e,i|\,\rho\,|e',i'\rangle|$$

よく使われているコヒーレンスメジャーの一つ

➡ $C_{l_1}(\rho_{\mathrm{bd}})$で、 ρの持つ縮退間コヒーレンスの量になる

Quantum frictionとquantum lubrication

Quantum friction:

$$\frac{J(\rho)^2}{\dot{\sigma}(\rho)} \leq \frac{J(\rho_{\mathrm{bd}})^2}{\dot{\sigma}(\rho_{\mathrm{bd}})}$$

・異なるエネルギーレベルの間のコヒーレンスは摩擦を強める

・縮退がないときは、コヒーレンスは熱機関の性能を向上させることができない

Quantum lubrication:

$$\frac{J(\rho_{\mathrm{sd}})^2}{\dot{\sigma}(\rho_{\mathrm{sd}})} \leq \frac{A_{\mathrm{cl}}}{2}$$

$$\frac{J(\rho_{\mathrm{bd}})^2}{\dot{\sigma}(\rho_{\mathrm{bd}})} \leq \frac{A_{\mathrm{cl}} + A_{\mathrm{qm}}}{2}$$

$\mathrm{Tr}[\rho_{\mathrm{sd}} X]$

$$X := \sum_{\omega,a} \omega^2 L^\dagger_{\omega,a} L_{\omega,a} \quad X_{\mathrm{diag}} := \sum_{e,i} \Pi_{e,i} X \Pi_{e,i}$$

・縮退間のコヒーレンスは摩擦を弱める

・A_{qm}はl1-コヒーレンスノルムに比例

$$A_{\mathrm{qm}} = \underbrace{C_X}_{\max_{e,j,j' s.t. j\neq j'} |\langle e,j|X|e,j'\rangle|} \times \underbrace{C_{l_1}(\rho_{\mathrm{bd}})}_{\text{縮退間コヒーレンスの量}}$$

主結果：コヒーレンスの流速・散逸トレードオフへの影響

合わせると以下が得られる：

$$\frac{J(\rho)^2}{\dot{\sigma}(\rho)} \le \frac{J(\rho_{\mathrm{bd}})^2}{\dot{\sigma}(\rho_{\mathrm{bd}})}$$

$$\frac{J(\rho_{\mathrm{bd}})^2}{\dot{\sigma}(\rho_{\mathrm{bd}})} \le \frac{A_{\mathrm{cl}} + A_{\mathrm{qm}}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{J(\rho)^2}{\dot{\sigma}(\rho)} \le \frac{A_{\mathrm{cl}} + A_{\mathrm{qm}}}{2}$$

さらに変形するとこの形：

$$\frac{2J(\rho)^2}{A_{\mathrm{qm}} + A_{\mathrm{cl}}} \le \dot{\sigma}(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad 不可逆性 \ge \frac{局所保存量変化}{(コヒーレンス + 定数)}$$

予想した不等式の形が得られている

3 主結果（つづき）：熱抵抗はどこまで減るか？

次に、トレードオフをどこまで弱められるか、を考える

$$\frac{J(\rho)^2}{\dot{\sigma}(\rho)} \le \frac{A_{\mathrm{cl}} + A_{\mathrm{qm}}}{2}$$

もしもA_{qm}がO(N^2)の量なら、を考える

Nは例えば縮退の数や、粒子の数

すると、$J = O(N)$、 $\dot{\sigma} = O(1)$が式的に可能であることが分かる。

➡コヒーレンスが十分にあり、A_{qm}がO(N^2)になるときには「マクロな大きさの熱が流れるのに、エントロピー増大はミクロオーダーのまま」という状況が生じうる

実際に、以下を満たす具体形を構成することが出来る：

$$A_{\mathrm{qm}} = O(N^2) \quad \& \quad \begin{aligned} J(\rho^+) &= O(N) \\ \dot{\sigma}(\rho^+) &= O(1) \end{aligned}$$

➡「散逸なし熱流」の実現

応用：熱機関の性能向上

我々の結果からは、熱機関のオーダーレベルでの性能向上が（トイモデルで）得られる。

まず、「仕事率をO(N)にしつつ、効率をカルノーに近づける」ことは、
古典マルコフなエンジンでは決して不可能であることが知られている：

$$P \leq \overline{\Theta}\beta_L \, \eta(\eta_{\mathrm{Car}} - \eta) \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{c} \eta = \eta_{Car} - O(1/N) \\ \Downarrow \\ P = O(1) \end{array}}$$

N. Shiraishi, K. Saito, and H. Tasaki
Phys. Rev. Lett. **117**, 190601

注：仕事などの示量変数はo(N)の場合、熱力学的には0として扱われる。
例えば熱力学において揺らぎは無視できるが、これはO($\sqrt{N}$)。

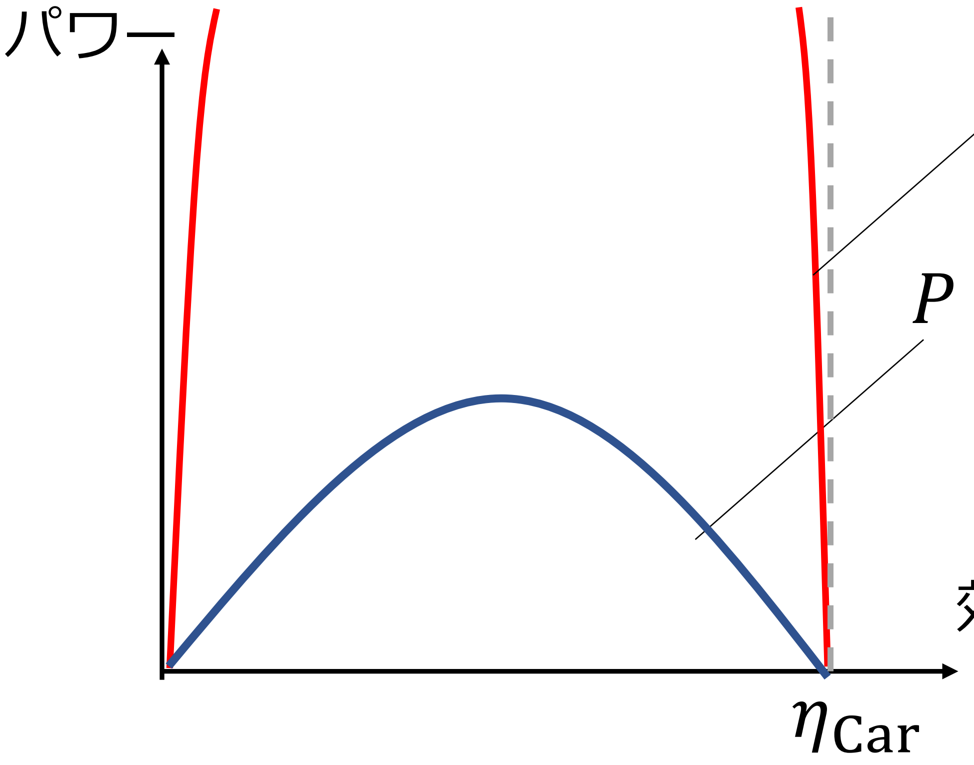
これは、$\overline{\Theta}$の部分が、古典では高々O(N)までしか向上させられないから。

量子では、この限界を突破できる。これは、A_qmをO(N^2)まで増幅できるためである。

$$P \leq (\overline{A_{\mathrm{cl}}} + \overline{A_{\mathrm{qm}}})\beta_L \, \eta(\eta_{\mathrm{Car}} - \eta) \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{c} \eta = \eta_{Car} - O(1/N) \\ P = O(N) \end{array}}$$

古典と量子の違い：グラフで見る違い

前スライドで見た古典と量子の違いは、パワーと効率のグラフを介してみることでよりはっきりとわかる：



$$P \leq (\overline{\mathrm{A}_{\mathrm{cl}}} + \overline{\mathrm{A}_{\mathrm{qm}}})\beta_L \, \eta(\eta_{\mathrm{Car}} - \eta)$$

係数が発散しているため、効率がカルノー効率に近づいても、パワーが大きいまま

$$P \leq \overline{\Theta}\beta_L \, \eta(\eta_{\mathrm{Car}} - \eta)$$

効率がカルノー効率に近くなると、パワーは必然的に0になる

ここからの構成

☑ **背景**：熱力学、測定過程、量子計算、誤り訂正の類似する(しかし別個の)定理たち

☑ **提案**：対称性・不可逆性・量子性の普遍的トレードオフ構造

☑ **結果1**：マスター方程式系における結果
- 流速・散逸トレードオフへの量子コヒーレンスの影響
- 散逸なし熱流と、それを用いた熱機関の性能向上法の構成

結果2：より一般の系における統一的不等式
- 対称性・不可逆性・量子性の間のトレードオフ不等式
- Wasserstein距離を介したブラックホールスクランブリングへの適用

展望：まとめと今後の展望

主結果：SIQトレードオフ

主結果：

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

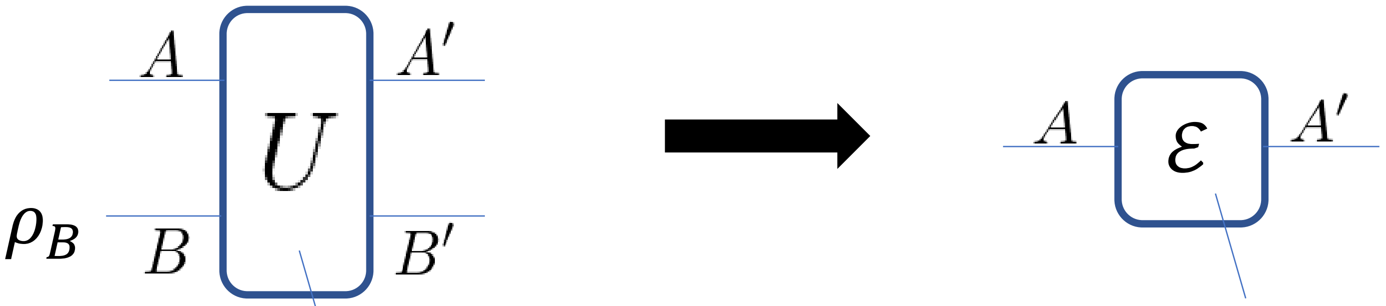
HT, R. Takagi, Y. Kuramochi arXiv:2206.11086 (2022)
HT and K. Saito, arXiv:2103.01876 (2021)

QIP2023 regular talk

単純だが、多くの対象に対して適用できる。

適用例：量子計算ゲート・量子誤り訂正符号・量子測定・量子ブラックホール
・任意の量子熱力学的過程

問題設定



$$X_{A'} + X_{B'} = U^\dagger (X_A + X_B) U$$

$$\mathcal{E}(\dots) := \mathrm{Tr}_{B'}[U(\dots \otimes \rho_B)U^\dagger]$$

結果：

$\mathcal{E}$がどの程度、局所保存量を変化させるかの度合いを表す係数

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

$\mathcal{E}$の不可逆性

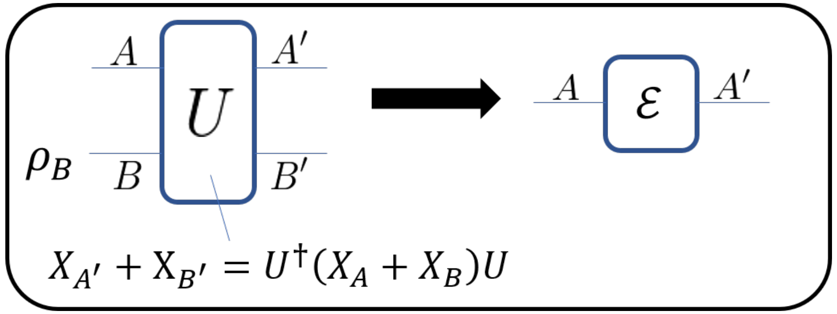
Bの持つコヒーレンス＝Fisher情報量

非負定数

以降、順に説明する。

不可逆性指標δ

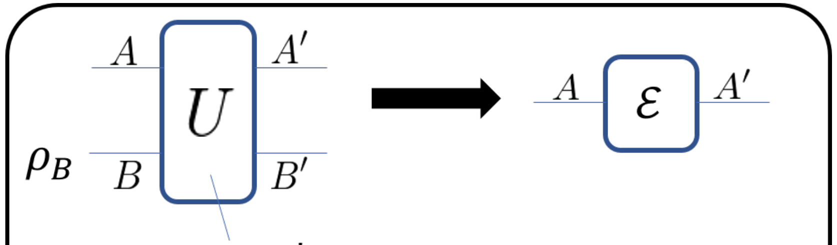
$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



不可逆性 δ : $\mathcal{E}$ と “test ensemble”$\{\mathrm{p_k}, \rho_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ の関数

不可逆性指標δ

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \le \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



$$X_{A'} + X_{B'} = U^{\dagger}(X_A + X_B)U$$

不可逆性 δ：$\mathcal{E}$ と “test ensemble”$\{\mathrm{p_k}, \rho_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ の関数

$$\boxed{\delta := \min_{\mathcal{R}:A'\to A} \sqrt{\sum_k p_k \delta_k^2}}$$

$$\delta_k := D_F(\rho_k, \mathcal{R}\circ\mathcal{E}(\rho_k))$$

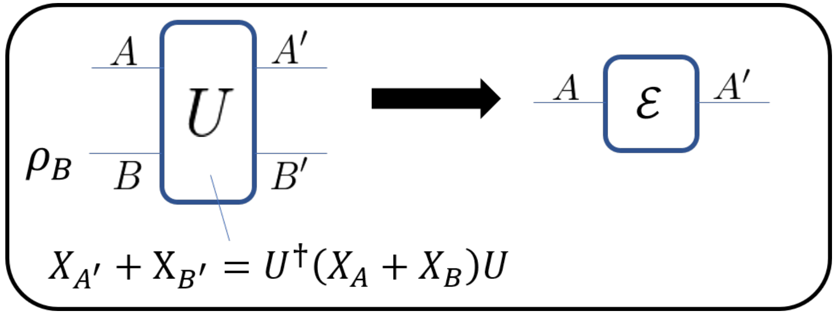
recovery error for ρ_k

$$D_F\,(\rho,\ \sigma) := \sqrt{1 - F^2(\rho,\sigma)}$$

$$\{\mathrm{p_k}, \rho_k\} \xrightarrow{A} \boxed{\mathcal{E}} \xrightarrow{A'} \boxed{\mathcal{R}} \xrightarrow{A} \{\mathrm{p_k}, \mathcal{R}\circ\mathcal{E}(\rho_k)\}$$

不可逆性指標δ

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



不可逆性 δ : $\mathcal{E}$ と "test ensemble"$\{\mathrm{p_k}, \rho_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ の関数

$$\boxed{\delta := \min_{\mathcal{R}:A'\to A} \sqrt{\sum_k p_k \delta_k^2}}$$

$\delta_k := D_F(\rho_k, \mathcal{R}\circ\mathcal{E}(\rho_k))$

recovery error for ρ_k

$D_F\,(\rho,\,\sigma) := \sqrt{1 - F^2(\rho,\sigma)}$

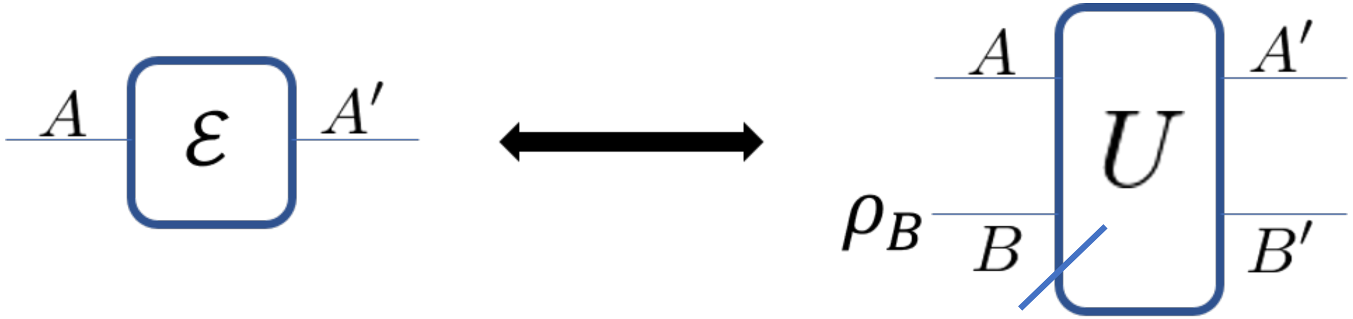
重要な性質: δ は様々な不可逆指標を下からバウンドする.

$$\delta \leq \sqrt{\Sigma}, \quad \delta \leq \delta_Q, \quad \text{and } \delta \leq \frac{\delta_P}{\sqrt{2}},$$

e.g. the entropy production, the entanglement-fidelity recovery error, and the error of Petz map recovery, etc.

コヒーレンス量指標：SLD-Fisher情報量

$$\boxed{\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}}$$



$$X_A + X_B = U^\dagger (X_{A'} + X_{B'}) U$$

$$\boxed{\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\rho_B}(X_B)}$$

SLD-Quantum Fisher information for state family $\{e^{-iXt}\rho e^{iXt}\}$:

$$\mathcal{F}_\rho(X) := \lim_{t\to 0} \frac{D_F(\rho, e^{-iXt}\rho e^{iXt})^2}{t^2}$$

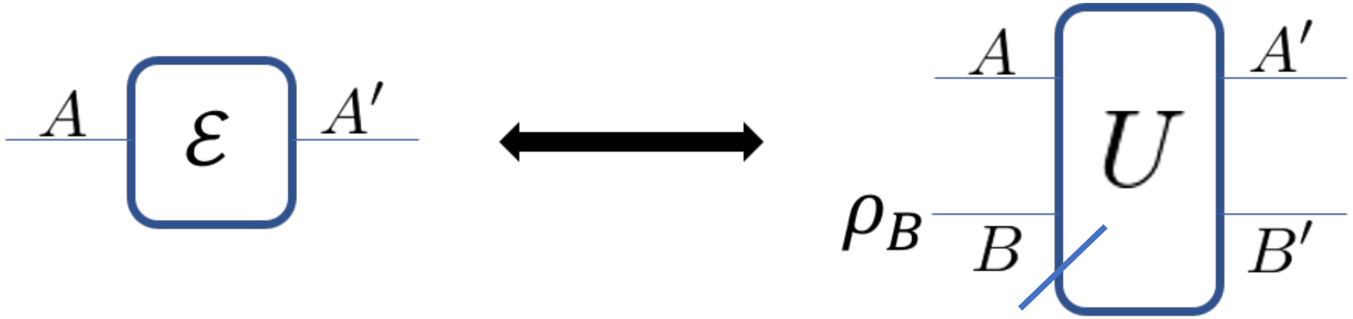
重要な性質 1: resource theory of asymmetryのリソース指標

C. Zhang, et al., Physical Review A 96, 042327 (2017).
R. Takagi, Scientific Reports 9, 14562 (2019).

28

コヒーレンス量指標：SLD-Fisher情報量

$$\boxed{\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}+\Delta}} \le \delta \text{ or } \sqrt{\delta}}$$



$$X_A + X_B = U^\dagger (X_{A'} + X_{B'}) U$$

$$\boxed{\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\rho_B}(X_B)}$$

SLD-Quantum Fisher information for state family $\{e^{-iXt}\rho e^{iXt}\}$:

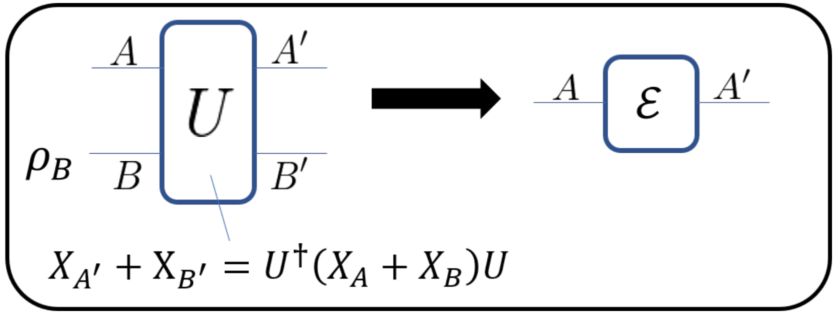
$$\mathcal{F}_\rho(X) := \lim_{t\to 0} \frac{D_F(\rho, e^{-iXt}\rho e^{iXt})^2}{t^2}$$

重要な性質 2：物理量Xの量子揺らぎの標準的指標

$$\mathcal{F}_\rho(X) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{D_F\left(\rho, e^{-iXt}\rho e^{iXt}\right)^2}{t^2} = 4 \min_{\{q_j,\phi_j\}:\rho=\sum_j q_j \phi_j} \sum_j q_j V_{\phi_j}(X)$$

局所保存量の変化についての指標

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



$\mathcal{C}$ ：局所保存量の変化の程度を表す

$$\boxed{\mathcal{C} := \sqrt{\sum_{k \neq k'} p_k p_{k'} \mathrm{Tr}[(\rho_k - \rho_{k'})_+ Y_A (\rho_k - \rho_{k'})_- Y_A]}}$$

$(O)_\pm$:=Positive (negative) part of the Hermitian operator O

$Y_A := X_A - \mathcal{E}^\dagger(X_{A'})$ 局所保存量の変化の演算子

重要性質: ・test states $\{\rho_k\}$が正規直交する純粋状態$\{|\psi_k\rangle\}$のとき,

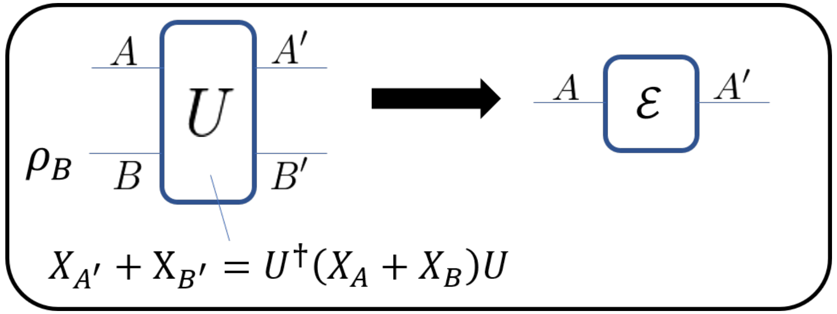
$$\mathcal{C} = \sum_{k \neq k'} p_k p_{k'} |\langle\psi_k|Y_A|\psi_{k'}\rangle|^2$$

Y_Aの非対角成分の絶対値の和

・$\mathcal{E}$ が X_A をnon-trivialに変化させる (i.e.$Y_A \propto 1_A$)⇒ $\mathcal{C} > 0$

Main result

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \le \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

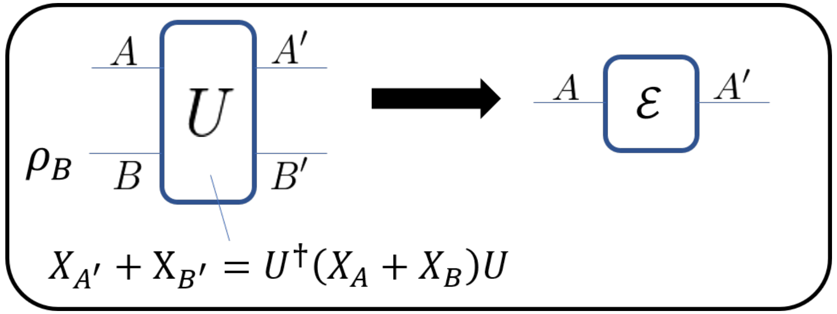


完全に一般のアンサンブル

アンサンブル$\{p_k, \rho_k\}$の各ρ_kが互いに直交する時
i.e., $F(\rho_k, \rho_{k'}) = 0$ for $k \neq k'$

Messages of main result

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \le \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



1. $\mathcal{C}>0 \Rightarrow \delta>0$

➡ $\mathcal{E}$ が局所保存量を変化させるとき, $\mathcal{E}$は不可逆でなくてはならない

2. Bの持つコヒーレンス ($= \mathcal{F}$)は、その不可逆性を和らげることが出来る。

Take home message:

大域的対称性の下で、局所保存量を変化させる試みは不可逆性をもたらす。しかし、この不可逆性は、局所保存量のコヒーレンスを用いて和らげることが出来る

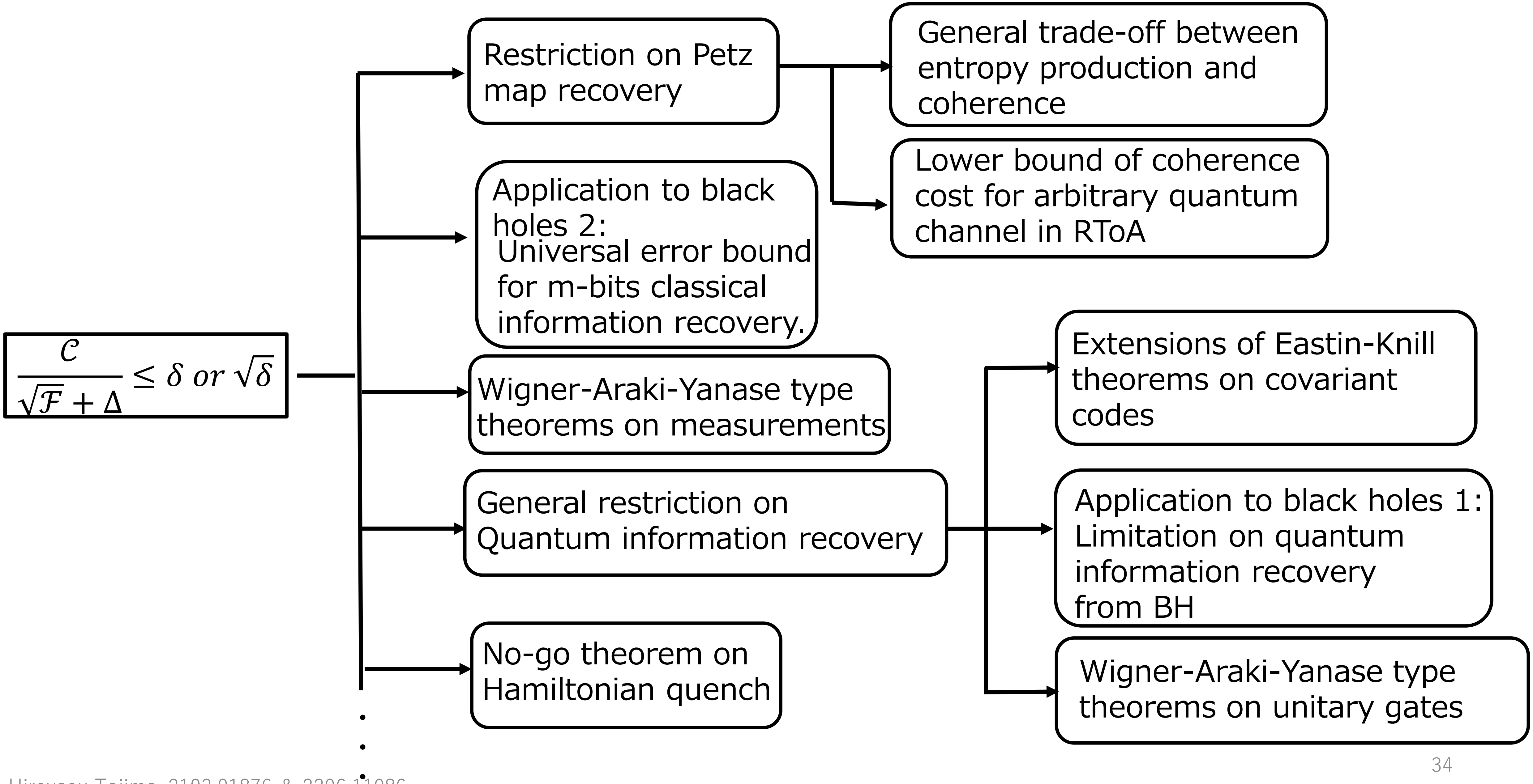
➡SIQ trade-off!

Applications?

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

???

Applications of S-I-Q tradeoff



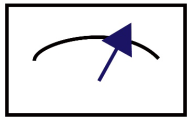
Hiroyasu Tajima, 2103.01876 & 2206.11086

SIQ定理の応用（単純化）

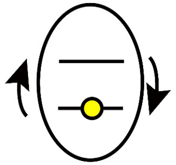
Main Theorem:
Trade-off between symmetry, irreversibility and coherence

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

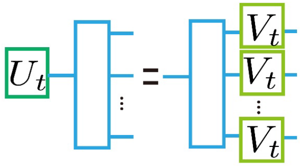
Quantum information processings:



Quantitative WAY theorem for fidelity error

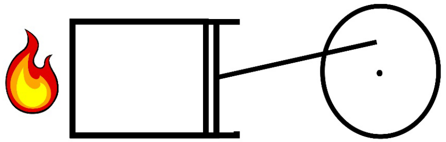


Coherence costs on gate implemetations



Extension of Eastin-Knill theorem

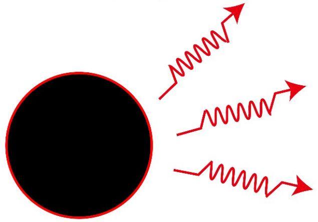
Thermodynamic processes:



Trade-off between entropy production and quantum coherence:

$$\sqrt{\Sigma_\beta(\rho)} \geq \frac{\mathcal{C}^2}{(\sqrt{\mathcal{F}_{\rho_C}(X_C)}+\Delta)^2}$$

black hole physics:



Universal error bound for m-bits classical information recovery:

$$\delta_H \geq \frac{m}{4} \times \frac{1}{\left(1+\frac{3}{a\gamma}\right)^2}$$

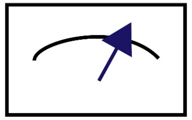
⋮

SIQ定理の応用（単純化）

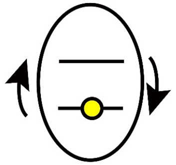
Main Theorem:
Trade-off between symmetry, irreversibility and coherence

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \leq \delta \ \text{or} \ \sqrt{\delta}$$

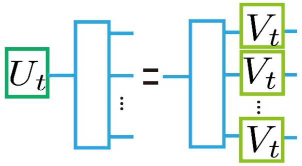
Quantum information processings:



Quantitative WAY theorem for fidelity error

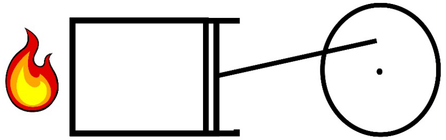


Coherence costs on gate implemetations



Extension of Eastin-Knill theorem

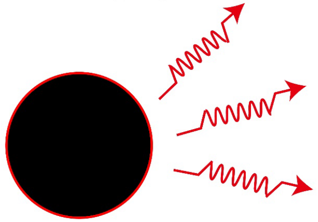
Thermodynamic processes:



Trade-off between entropy production and quantum coherence:

$$\sqrt{\Sigma_\beta(\rho)} \geq \frac{\mathcal{C}^2}{(\sqrt{\mathcal{F}_{\rho_C}(X_C)}+\Delta)^2}$$

black hole physics:



Universal error bound for m-bits classical information recovery:

$$\delta_H \geq \frac{m}{4} \times \frac{1}{\left(1+\frac{3}{a\gamma}\right)^2}$$

⋮

SIQ定理の量子情報処理への応用

すでに説明したように、対称性による量子情報処理への制限には様々なものが知られている

Measurement：WAY定理

反比例：（任意測定）

測定誤差⇔測定実装に必要なコヒーレンス

E. P. Wigner, Z. Phys. 133, 101 (1952).
H. Araki and M. M. Yanase, Phys. Rev.120, 622 (1960).
M. M. Yanase, Phys. Rev. 123, 666 (1961).
M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 88, 050402 (2002).
H. Tajima and H. Nagaoka, arXiv:1909.02904 (2019)

Unitary gates：ユニタリーWAY定理

反比例：（任意ユニタリー）

実装誤差⇔ゲート実装に必要なコヒーレンス

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 89, 057902 (2002).
H. Tajima, N. Shiraishi and K. Saito,　Phys. Rev. Lett. 121, 110403 (2018).
H. Tajima, N. Shiraishi and K. Saito,Phys. Rev. Research. 2, 043374 (2020).

Error correction：Eastin-Knill定理

反比例：（任意トランスバーサル符号）

復号誤差⇔符号に必要なqubit数

B. Eastin and E. Knill, Phys. Rev. Lett. 102, 110502 (2009).
P. Faist, S. Nezami, V. V. Albert, G. Salton, F. Pastawski, P. Hayden, and J. Preskill, Phys. Rev. X 10, 041018 (2020).

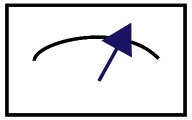
これらすべてが、SIQ定理のコロラリー
➡対称性から量子情報処理の制限は、一つの定理のそれぞれの特殊部分

SIQ定理の応用（単純化）

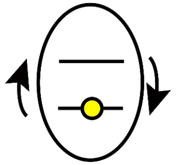
Main Theorem:
Trade-off between symmetry, irreversibility and coherence

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

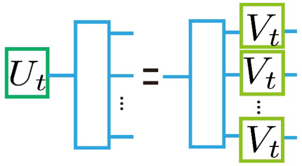
Quantum information processings:



Quantitative WAY theorem for fidelity error

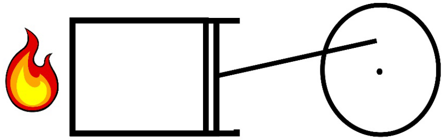


Coherence costs on gate implemetations



Extension of Eastin-Knill theorem

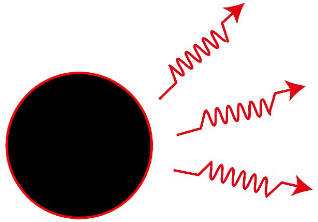
Thermodynamic processes:



Trade-off between entropy production and quantum coherence:

$$\sqrt{\Sigma_\beta(\rho)} \geq \frac{\mathcal{C}^2}{(\sqrt{\mathcal{F}_{\rho_C}(X_C)}+\Delta)^2}$$

black hole physics:



Universal error bound for m-bits classical information recovery:

$$\delta_H \geq \frac{m}{4} \times \frac{1}{\left(1+\frac{3}{a\gamma}\right)^2}$$

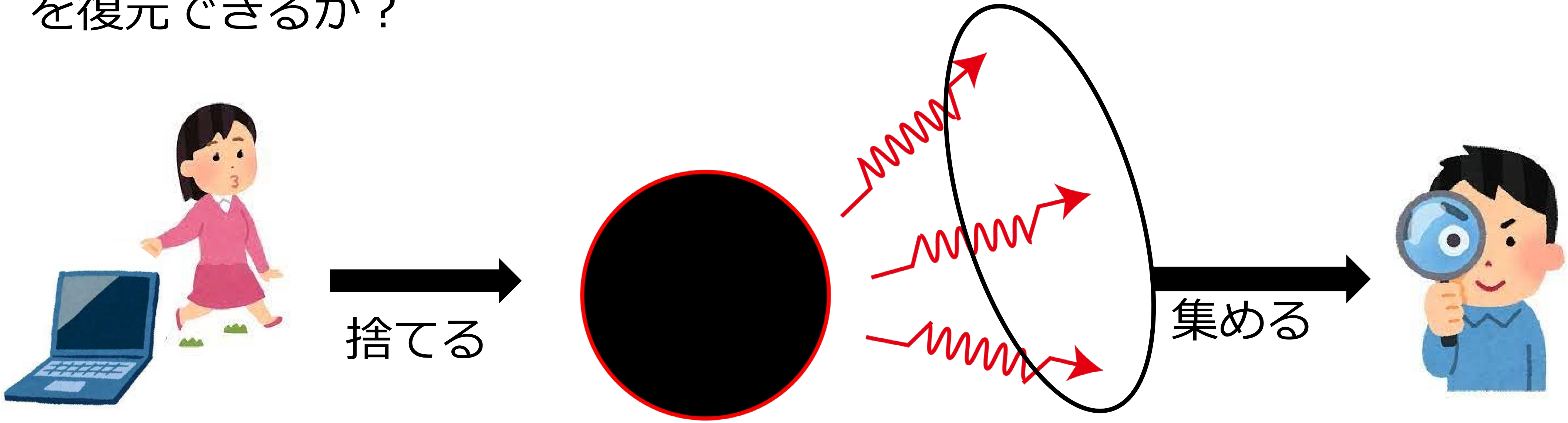
⋮

背景2：Hayden-Preskill思考実験

アリスが量子コンピュータのデータを隠すために、ブラックホールに投げ込む。

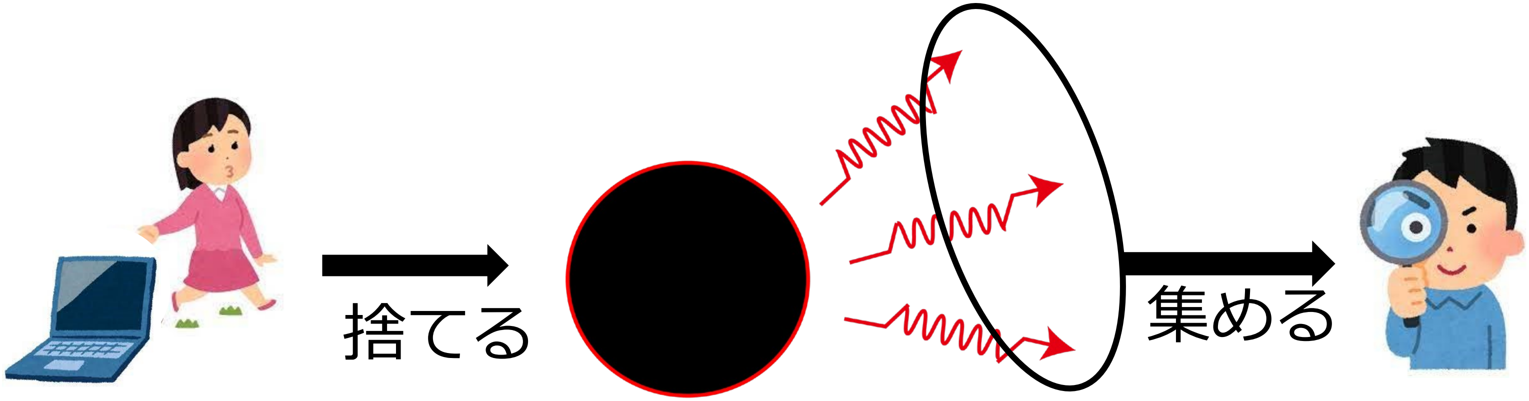
ところが、ボブはブラックホールから出るホーキング輻射を、ブラックホールができたときから、アリスがコンピュータを投げ込んだ後まで含めてずっと集めていた。

ボブはアリスがコンピュータを投げ込んでから、どのくらいでコンピュータのデータを復元できるか？



我々の結果は、この問題に適用できる

Hayden-Preskillの解析



k -qubit　　N-qubit　　投げ込まれた後に集めたqubitが、L個

仮定:

・ブラックホール、コンピュータ、ホーキング輻射は全てqubitの集合体とみなせる

・ブラックホールのダイナミクスはHaar random unitaryである

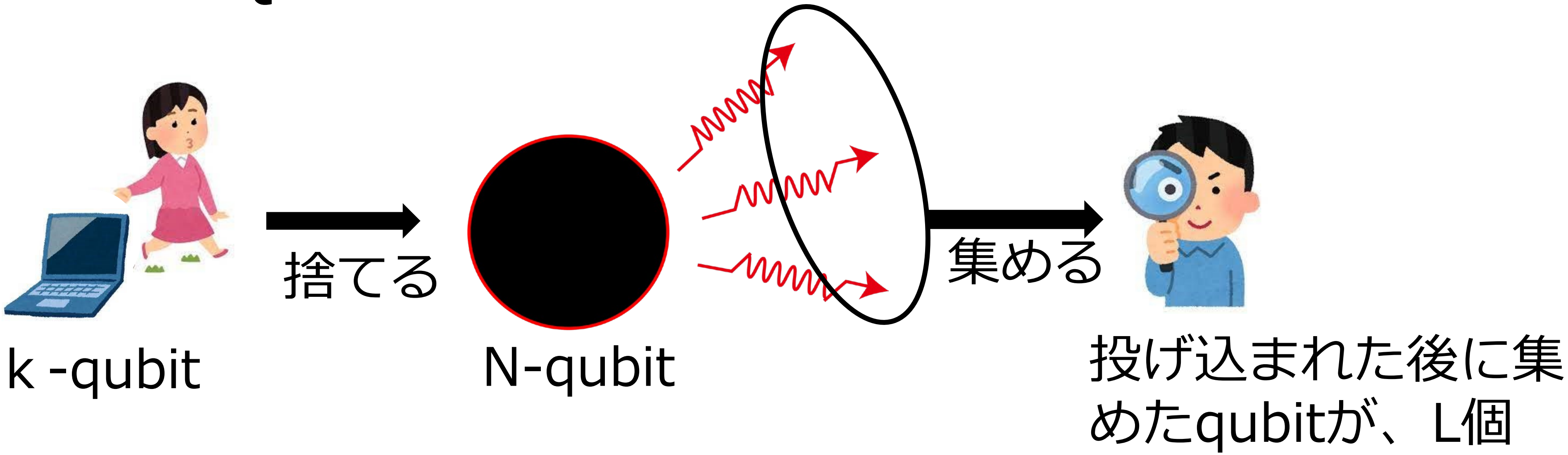
結果：

$$\delta_Q \leq \mathrm{const.} \times 2^{-(l-k)}$$

つまり、ボブは投げ込まれた物体の持つqubitよりほんの少し多くホーキング輻射を集めるだけで、ほぼ情報を完全に回復できる

➡ブラックホールは「情報的な鏡」である！

SIQ定理のブラックホール物理への応用



HaydenとPreskillの解析は、しかし、エネルギー保存則を仮定していない

エネルギー保存則を仮定した場合、上記の結論はどう変わるのか？

いくつかの先行研究において、保存則の下ではブラックホールからの情報回復に遅れが生じるのではないか、という提案がなされた

B. Yoshida, Phys. Rev. D **100**, 086001 (2019), J. Liu, Phys. Rev. Research **2**, 043164 (2020).

特に下記研究では、情報回復エラーのlowerおよびupper boundが求められている

Y. Nakata, E. Wakakuwa, M. Koashi, arXiv:2007.00895 (2020)

しかし、先行研究のlower boundはいくつかのヒューリスティックな仮定を必要とする。

我々の結果からは、こうした仮定のない厳密なlower boundを求めることができる。
特に、これまで解析が届かなかった、古典情報回復への保存則の影響を調べることが出来る

古典情報脱出に対する制限

我々の結果を、ハミング距離についてのorder1の量子Wasserstein距離を経由させて、この問題の解析を行うことが出来る。

G. De Palma, et. al. IEEE Transactions on Information Theory 67(10), 6627-6643 (2021)

具体的には、エネルギー保存のあるブラックホールにmビットの古典情報を投げ込むとき、平均何ビットが回復不能になるかを評価できる

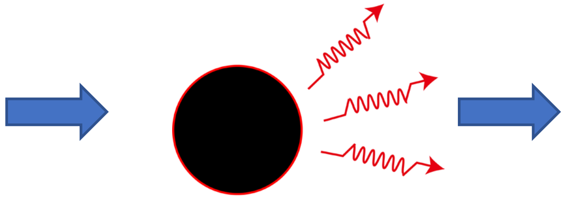
$$\delta_H \geq \frac{m}{4}\left(1+\frac{3}{a\gamma}\right)^{-2}$$

$$\gamma = 1 - \frac{l}{N+k}$$

＝ブラックホールの残存割合

Classical m bits

011100011010⋯0011101101



大体 m/4 ビットが、ブラックホールがほぼ蒸発するまで回復不能になる

0~~1~~11~~0~~001~~1~~010⋯~~0~~0~~1~~1101~~0~~1

ここからの構成

☑ **背景**：熱力学、測定過程、量子計算、誤り訂正の類似する(しかし別個の)定理たち

☑ **提案**：対称性・不可逆性・量子性の普遍的トレードオフ構造

☑ **結果1**：マスター方程式系における結果
・流速・散逸トレードオフへの量子コヒーレンスの影響
・散逸なし熱流と、それを用いた熱機関の性能向上法の構成

☑ **結果2**：より一般の系における統一的不等式

・対称性・不可逆性・量子性の間のトレードオフ不等式

・Wasserstein距離を介したブラックホールスクランブリングへの適用

展望：まとめと今後の展望

Summary

対称性・不可逆性・量子性の間のトレードオフ構造を予想し、それに対応する不等式を2種導いた

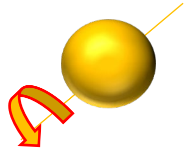
$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}}+\Delta} \le \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

$$\frac{2J(\rho)^2}{A_{\mathrm{qm}}+A_{\mathrm{cl}}} \le \dot{\sigma}(\rho)$$

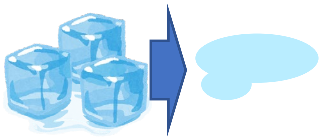
HT and K. Saito
arXiv:2103.01876 (2021)
HT, R. Takagi and Y. Kuramochi
arXiv:2206.11086 (2022)

H.Tajima and K. Funo,
Phys. Rev. Lett. **127**, 190604 (2021)

Symmetry



Irreversibility



Quantum coherence

$$\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

これらは多くの応用を持つ：測定・誤り訂正・計算ゲート実装・熱力学過程・ブラックホールスクランブリングなど

今後の目標としては、より多くの関係式を通して、この構造をよりよく理解したい