巨視的な遷移に対する速度限界

Ryusuke Hamazaki
(RIKEN CPR Hakubi)

@ 2023/3/16, Workshop OT 2023, 東京大学

Refs.)
*<u>**R. Hamazaki**</u>, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).
*[Review paper] Z. Gong and <u>**R. Hamazaki**</u>, International Journal of Modern Physics B 36 (31), 2230007 (2022).

Outline

1. イントロダクション：量子速度限界

2. 巨視的な遷移に対する速度限界

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

*連続系

*離散系

3. Conclusion

Outline

1. イントロダクション：量子速度限界

2. 巨視的な遷移に対する速度限界

    *連続系

    *離散系

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

3. Conclusion

非平衡量子ダイナミクス

量子力学：原子・分子等のダイナミクスを記述

$$i\hbar\frac{d\vec{\psi}}{dt} = H\vec{\psi}$$

Schrödinger方程式

$\vec{\psi}$: 量子状態を表すベクトル

$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$: (reduced) Planck定数

H : ハミルトニアン演算子（系のエネルギー）

自由度が増えると解くことは実質不可能

平衡統計力学：
ハミルトニアンを用いて
熱平衡状態の記述を与える

$$\rho_T = \frac{e^{-H/k_BT}}{Z}$$

Boltzmann

非平衡統計力学

基本原理は未解明

非平衡量子統計力学：近年の量子物理学のフロンティア

非平衡量子系の制御技術の発展

人工量子系の発展（量子シミュレータ・量子コンピュータ）

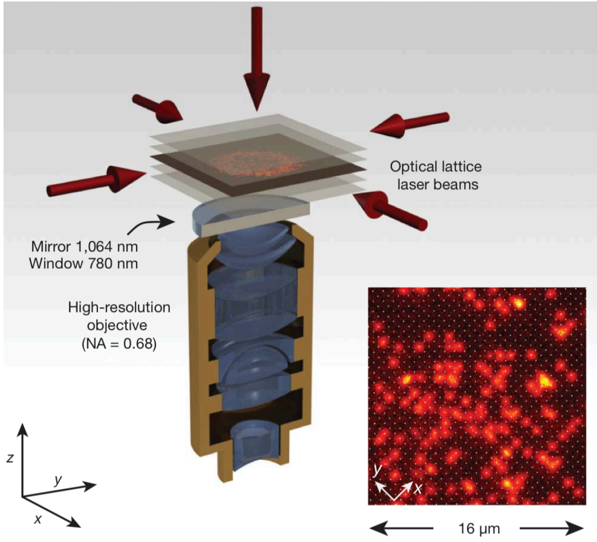
冷却原子・イオン系、超伝導量子ビット系など

*ノイズのほとんどない孤立系の実現

*系のパラメータを自在に制御

*高い空間・時間分解能を伴う観測技術

→ 非平衡ダイナミクスの検証の舞台



Sherson et al., Nature (2010)

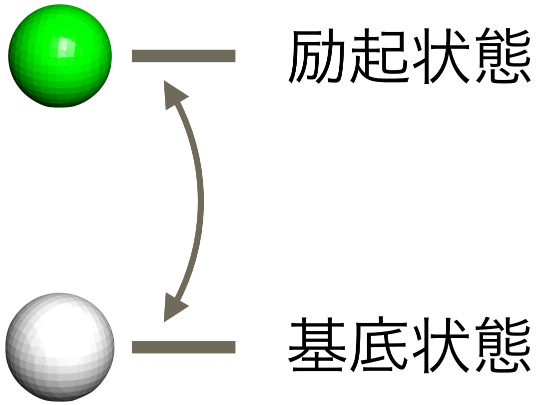
量子技術への期待の高まりにより、

量子系の制御に関する法則・限界を理解が求められている

→ 非平衡量子ダイナミクスの理解が理論的な基盤となる

量子速度限界

ある非平衡状態から別の状態に遷移する状況を考える



原子の内部状態遷移

原子集団の輸送

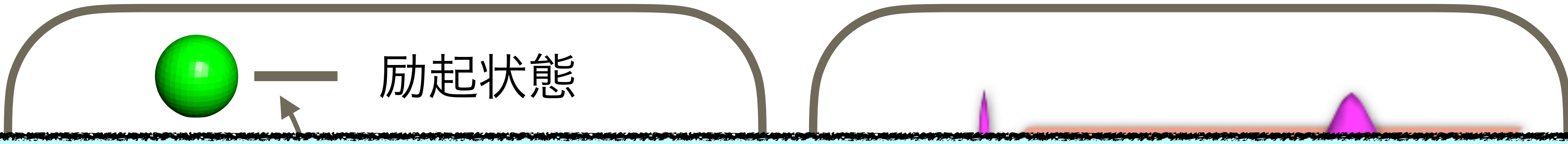
こうした遷移の**速度**に対し普遍的な法則はあるか？

1. 量子状態$\overrightarrow{\psi_i}$が別の状態$\overrightarrow{\psi_f}$に変化する時間？

2. 物理量A（原子の位置や励起状態にいる確率など）の速度？

量子速度限界

ある非平衡状態から別の状態に遷移する状況を考える



量子速度限界はこれらに対する厳密な不等式を与える

注：古典系でも、同様な問題設定による速度限界を議論できる

cf) 伊藤さんの講演

こうした遷移の速度に対し普遍的な法則はあるか？

1. 量子状態$\overrightarrow{\psi_i}$が別の状態$\overrightarrow{\psi_f}$に変化する時間？

2. 物理量A（原子の位置や励起状態にいる確率など）の速度？

MandelstamとTammの量子速度限界

1. 量子状態$\vec{\psi}_i$が別の状態$\vec{\psi}_f$に変化する時間を見積もれるか？

$$\vec{\psi}(0) = \vec{\psi}_i$$ （複素ヒルベルト空間$\mathbb{C}^D$の元）

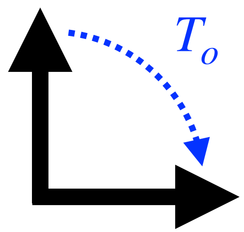
$$i\hbar \frac{d\vec{\psi}}{dt} = H\vec{\psi}$$

$$\vec{\psi}(T) = \vec{\psi}_f$$

速度は系のエネルギースケールに支配される

Mandelstam-Tamm限界 (1945)

$$\vec{\psi}(0) = \vec{\psi}_i$$



$$\vec{\psi}(T_o) = \vec{\psi}_f$$

$$\vec{\psi}_i^{\dagger}\vec{\psi}_f = 0$$

孤立量子系において、初期状態$\vec{\psi}_i$がそれと直交する

状態 $\vec{\psi}_f$に遷移するための時間をT_oとすると

$$T_o \geq \frac{\hbar\pi}{2\Delta E} \quad \longleftrightarrow \quad \Delta E \cdot T_o \geq \frac{\hbar\pi}{2} \qquad \Delta E = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$$

時間とエネルギー揺らぎのトレードオフ関係

L. Mandelstam and I. Tamm, J. Phys. 9 249 (1945).

期待値に対する量子速度限界

2. 物理量Aの速度を見積もれるか？

量子力学では物理量Aは演算子であり、観測ごとに測定結果は揺らぐ

→ その期待値$\langle A \rangle = \vec{\psi}^{\dagger} A \vec{\psi}$の速度を考える

物理量の期待値$\langle A(t) \rangle$ に対する速度限界 [Mandelstam-Tamm (1945)]

$$\left| \frac{d\langle A(t) \rangle}{dt} \right| \le \frac{2}{\hbar} \Delta A(t) \cdot \Delta E$$

$$\Delta A(t)^2 = \langle A(t)^2 \rangle - \langle A(t) \rangle^2$$

時刻 t での量子揺らぎ

エネルギー揺らぎが（瞬間）速度をバウンドする

$T_{\mathrm{o}} \ge \dfrac{\hbar \pi}{2\Delta E}$ はこの式で $A = \vec{\psi}(0)\vec{\psi}(0)^{\dagger}$とすると得られる

期待値に対する量子速度限界

2. 物理量Aの速度を見積もれるか？

量子力学では物理量Aは演算子であり、観測ごとに測定結果は揺らぐ

既存の量子速度限界は特に小さな系で成功を収めている

（原子の内部状態遷移など）

$\left| \quad dt \quad \right| \quad \hbar$

時刻 t での量子揺らぎ

エネルギー揺らぎが（瞬間）速度をバウンドする

$T_{\mathrm{o}} \geq \dfrac{\hbar\pi}{2\Delta E}$ はこの式で $A = \overrightarrow{\psi}(0)\overrightarrow{\psi}(0)^{\dagger}$とすると得られる

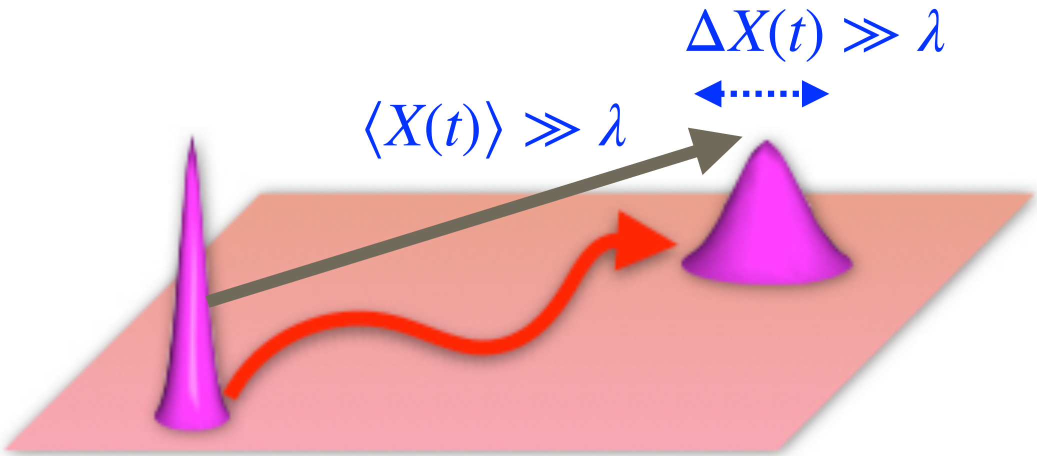
巨視的な非平衡遷移

重要な非平衡過程の一つ：粒子等の巨視的な距離の輸送

興味ある物理量：

原子の平均変位 $\langle X(t) \rangle$、

変位の揺らぎ$\Delta X(t)$など



巨視的な遷移：

特徴的な微視的スケール λ（格子間隔など）に比べ、

系の大きさや物理量の変化、揺らぎなどが十分大きい

非一様な初期状態からの緩和、量子状態の転送など、

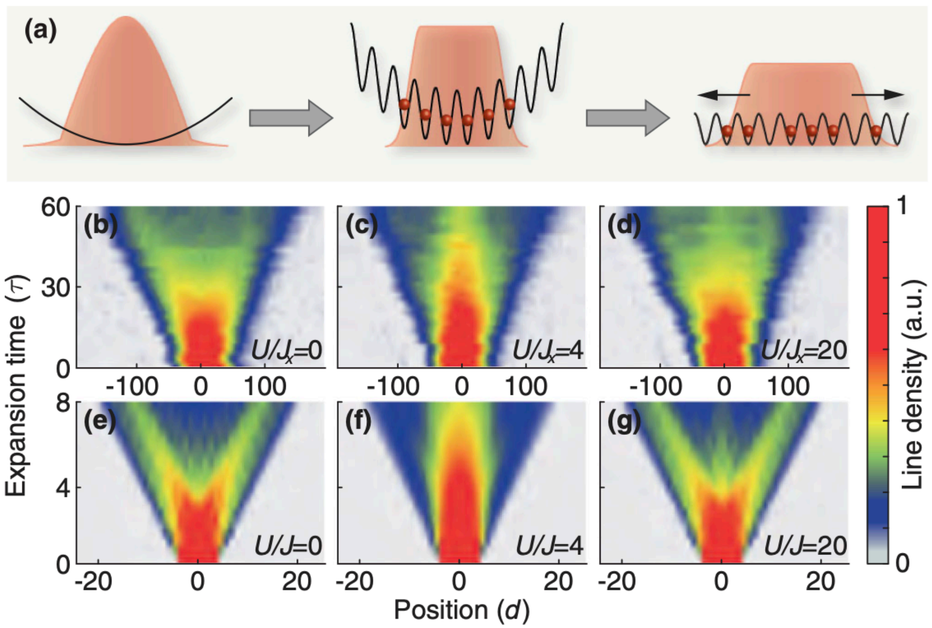
非平衡量子系において重要な役割を果たす

巨視的な非平衡遷移

重要な非平衡過程の一つ：粒子等の巨視的な距離の輸送

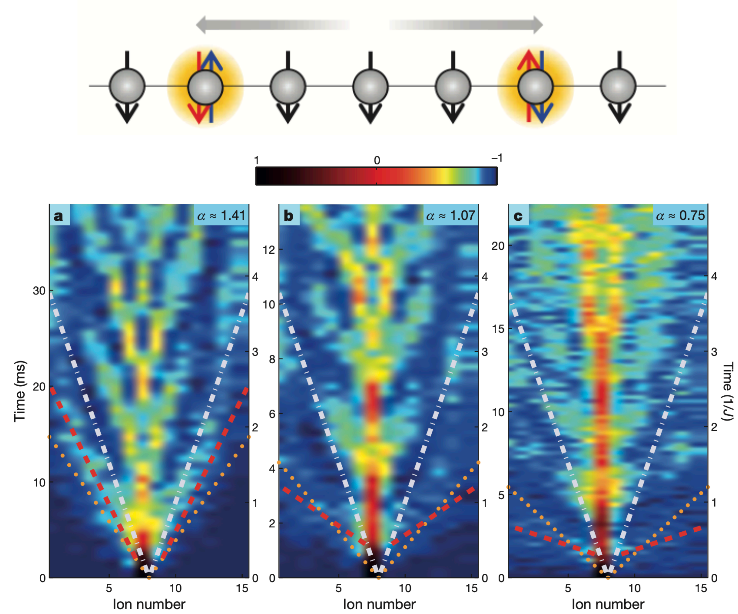
$$\Delta X(t) \gg \lambda$$

J. P. Ronzheimer et al., PRL 110, 205301 (2013).



原子集団の輸送

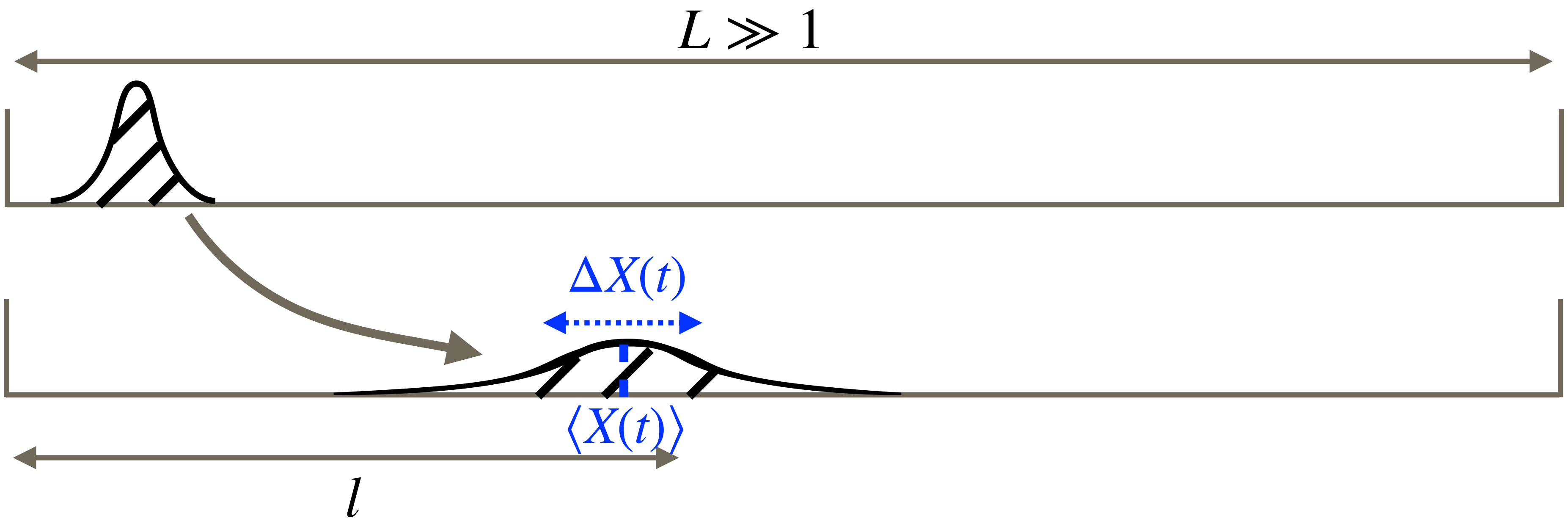
P. Jurcevic et al., Nature 511, 202 (2014).



準粒子励起の伝搬

既存の速度限界を用いて遷移を理解することができるか？

巨視的な遷移に対する既存の速度限界の破綻



例）　物理量 X：一次元中の M 原子の平均位置

$$\left| \frac{d\langle X(t)\rangle}{dt} \right| \le 2\Delta X \cdot \Delta E$$

実際の速度（左辺）は有限

$\leftrightarrow$ 右辺は典型的に発散し、意味を持たない

$$\Delta X \sim \min(t^c, L) \quad (c > 0)$$

巨視的な遷移に対して有効な新しい速度限界が必要

最適輸送理論からの示唆

$$\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \leq 2\Delta A \cdot \Delta E$$

遷移は局所的に起こっている

右辺はダイナミクスの<u>局所性</u>を取り入れられていない

空間の距離構造を適切に取り入れる必要がある

cf) Wasserstein距離 $W_q(p,p')^q = \inf_{\Pi \in \mathscr{C}(p,p')} \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\, \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})^q \Pi(\mathbf{x},\mathbf{y})$

距離構造

Kantorovich-Rubinstein双対

$$\left|\frac{\langle A(t+\delta t)\rangle - \langle A(t)\rangle}{\delta t}\right| \leq \|A\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \frac{W_1(\overrightarrow{p}(t), \overrightarrow{p}(t+\delta t))}{\delta t}$$

Lipschitz定数

例えば粒子位置に関し、ΔAのような発散が起こらない

Outline

1. イントロダクション：量子速度限界

2. 巨視的な遷移に対する速度限界

*連続系

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

*離散系

3. Conclusion

連続系における一般的な議論

連続空間$\{\mathbf{x}\}$で定義された系を考える

物理量 $A = \{A(\mathbf{x})\}$ の期待値 $\langle A(t)\rangle = \int d\mathbf{x} A(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}, t)$ 確率密度関数

局所的に遷移が起こることをどのように取り入れるか？

← 確率の局所保存則！

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$$

確率流密度

$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} |\mathbf{j}| = 0$ を仮定

$$\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt} = \int d\mathbf{x} A(\mathbf{x})\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) = -\int d\mathbf{x} A(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}\, \nabla A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$$

部分積分

Cauchy-Schwarz
不等式

$$\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \leq \sqrt{\langle (\nabla A)^2 \rangle \left\langle \left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right)^2 \right\rangle}$$

Aの勾配

確率流密度

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

連続系における量子速度限界

非線形シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\mathrm{ext}} + g\,|\psi(\mathbf{x},t)|^2\right)\psi(\mathbf{x},t) \qquad \int d\mathbf{x}\,|\psi(\mathbf{x},t)|^2 = 1$$

例）原子集団の（平均場的）ダイナミクスを記述

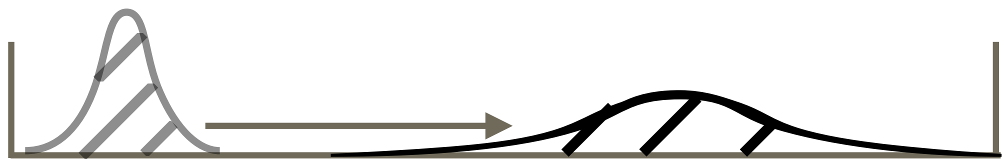
$|\psi|^2 = \rho$は規格化された粒子密度（確率密度関数と等価）

次のようなρと結合した物理量に注目

$$\langle A(t)\rangle = \int d\mathbf{x}A(\mathbf{x})\,|\psi(\mathbf{x},t)|^2 = \int d\mathbf{x}A(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x},t)$$

エネルギー揺らぎによる速度限界は意味をなさない

$$\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \le \frac{2}{\hbar}\Delta A\Delta E$$



R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

連続系における量子速度限界

この系では次の連続の式が成立： $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{j} = -\nabla\cdot\left(\rho\dfrac{\hbar\nabla\theta}{m}\right)$

確率の局所保存則を用いた速度限界を適用

$\psi = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$

θ : 量子位相

$$\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \le \sqrt{\langle(\nabla A)^2\rangle\left\langle\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right)^2\right\rangle}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\sqrt{\langle(\nabla A)^2\rangle}\sqrt{\langle(\nabla\theta)^2\rangle} = \sqrt{\langle(\nabla A)^2\rangle}\sqrt{2E_{\mathrm{kin}}}$$

$\mathbf{j} = \rho\dfrac{\hbar\nabla\theta}{m}$

原子集団の運動エネルギー

$$E_{\mathrm{kin}} = \int d\mathbf{x}\frac{\rho|\nabla\theta|^2\hbar^2}{2m^2}$$

速度は**運動**エネルギーによって抑えられる

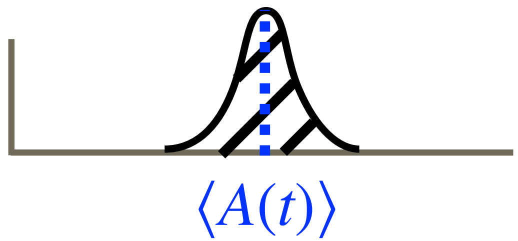
cf) Mandelstam-Tamm限界は**全**エネルギー**揺らぎ**

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

巨視的な遷移での有効性

$$\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \leq \sqrt{\langle(\nabla A)^2\rangle}\sqrt{2E_{\mathrm{kin}}} \leq \|\nabla A\|_\infty\sqrt{2E_{\mathrm{kin}}}$$

$$\|\nabla A\|_\infty = \max_{\mathbf{x}} \|\nabla A(\mathbf{x})\|_2$$



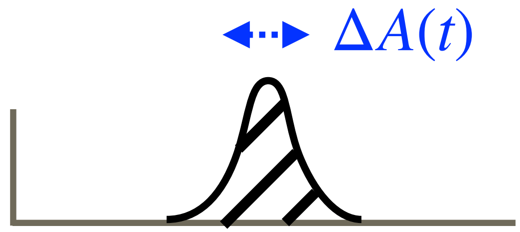
なぜ巨視的な遷移に有効か？ → 多くの場合 $\nabla A \ll \Delta A$！

例） $A = x$の時、$\langle(\nabla x)^2\rangle = \|\nabla x\|_\infty = 1$ は系のサイズや時間によらない

発散しない意味のある上限を得る $\left|\frac{d\langle x(t)\rangle}{dt}\right| \leq \sqrt{2E_{\mathrm{kin}}}$ $\left(\ll \frac{2}{\hbar}\Delta x \Delta E\right)$

揺らぎについても同様な速度限界が存在

$$\left|\frac{d\Delta A(t)}{dt}\right| \leq \|\nabla A\|_\infty\sqrt{\left\langle\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right)^2\right\rangle} \leq \|\nabla A\|_\infty\sqrt{2E_{\mathrm{kin}}}$$



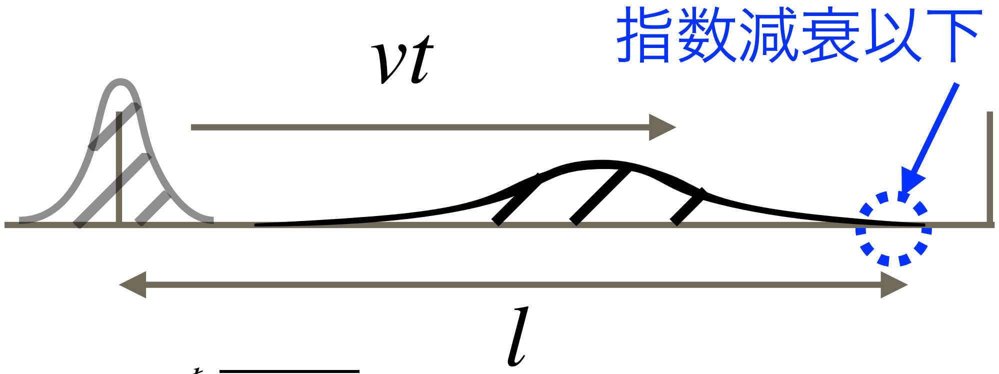
例） $\left|\frac{d\Delta x(t)}{dt}\right| \leq \sqrt{2E_{\mathrm{kin}}}$

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

Remark: 分布のテール

$\langle A(0)\rangle = 0$ の下、全ての$\lambda, z > 0$について、

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}}\left[|A(t)| \geq \|\nabla A\|_\infty z\right] \leq 2\cosh\left(\frac{\lambda A}{\|\nabla A\|_\infty}\right)_0 e^{-\lambda(z-\overline{\|\frac{\mathbf{j}}{\rho}\|_\infty}t)} \leq 2\cosh\left(\frac{\lambda A}{\|\nabla A\|_\infty}\right)_0 e^{-\lambda(X-\frac{\hbar}{m}\overline{\|\nabla\theta\|_\infty}t)}$$



特に一次元、$A = x, z = l$ととると、

$$1 - \int_{-l}^{l} \rho(x,t)dx \leq 2\langle\cosh\lambda x\rangle(0) \times e^{-\lambda(l-\frac{\hbar}{m}\overline{\|\nabla\theta\|_\infty}t)}$$

$l \gg vt$ の時に指数減衰以下 ($v := \hbar\overline{\|\nabla\theta\|_\infty}/m$)

Lieb-Robinson速度v_{LR}（空間的な情報伝搬の速度に関する上限値）

よりもタイトな速度となる：$v \leq v_{\mathrm{LR}}$

Z. Gong and **R. Hamazaki**, Int. J. Mod. Phys. B 36 (31), 2230007 (2022).

Remark: 熱力学的速度限界

Fokker-Planck方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} = -\nabla \cdot (\rho\mu(\mathbf{F} - T\nabla \ln \rho))$$

T : 温度, μ : 易動度, $\mathbf{F}$: 外力

この場合には、次の熱力学的速度限界が得られる

$$\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \leq \sqrt{\langle(\nabla A)^2\rangle}\sqrt{\langle(\mathbf{j}/\rho)^2\rangle} \leq \sqrt{\mu T \sigma \langle(\nabla A)^2\rangle}$$

$$\sigma = \frac{\langle \mathbf{j}^2/\rho^2\rangle}{\mu T}$$

エントロピー生成率（系の不可逆性の指標）

A. Dechant and S. Sasa, J. Stat. Phys. (2018); PRE (2018)

注）過剰エントロピー生成率σ_{ex}を用いても左辺はバウンドできる

最適輸送との関連が議論できる　　伊藤さん、Vuさん、吉村さんの講演

Outline

1. イントロダクション：量子速度限界

2. 巨視的な遷移に対する速度限界

*連続系

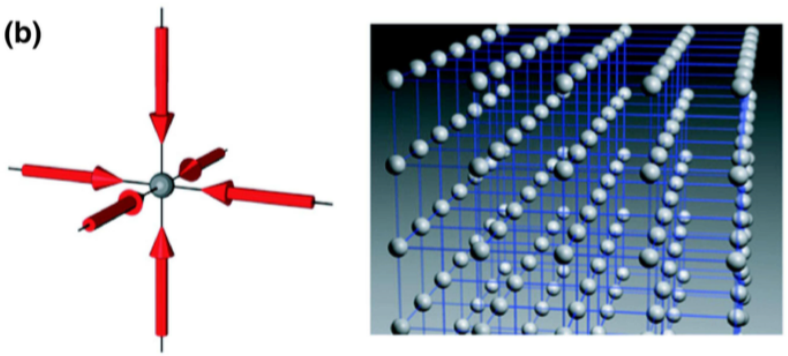
R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

*離散系

3. Conclusion

離散的な量子ダイナミクス

人工量子系などでは、巨視的な離散遷移ダイナミクスがしばしば重要



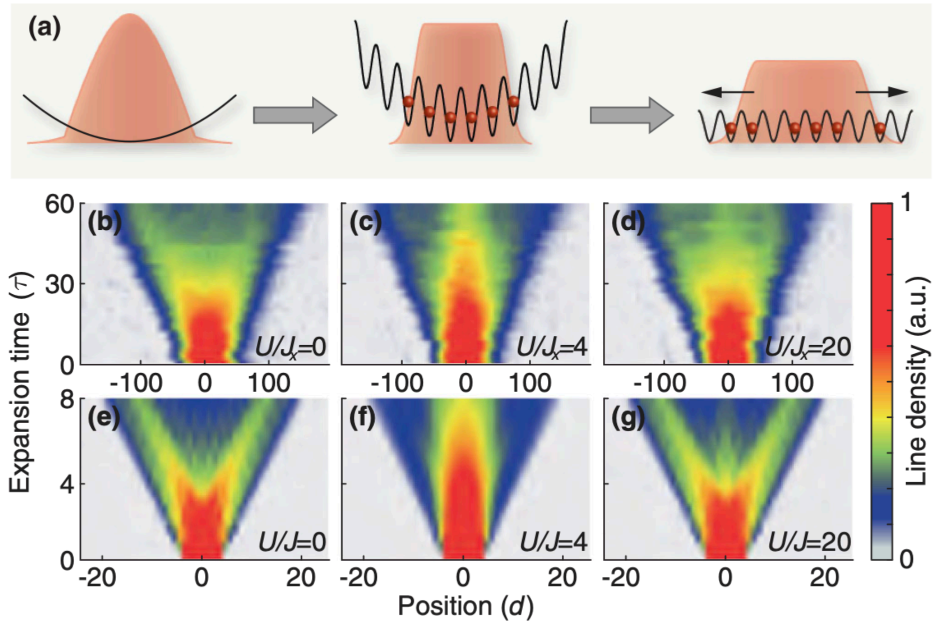
I. Bloch et al., Rev. Mod. Phys. (2008)

光格子中の冷却原子:

レーザーの定在波により「格子」を作り、その上に原子を並べる

→ 非平衡量子統計力学の検証の舞台となっている

J. P. Ronzheimer et al., PRL 110, 205301 (2013).



光格子中の原子集団の輸送

原子の位置の巨視的な変化

離散的な系でのアイデア

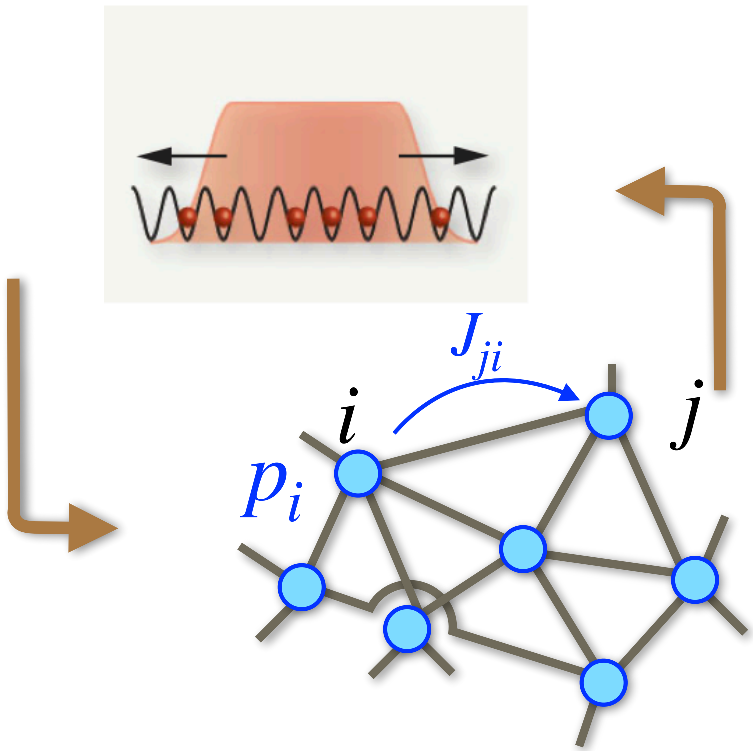
任意の離散的な多体系を取り扱うために、

グラフ構造 $G = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ へとマップする

バーテックス: $i \in \mathscr{V}$ （状態の基底）

エッジ: $i \neq j$ かつ i と j 間の

遷移があれば $(i, j) \in \mathscr{E}$



R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

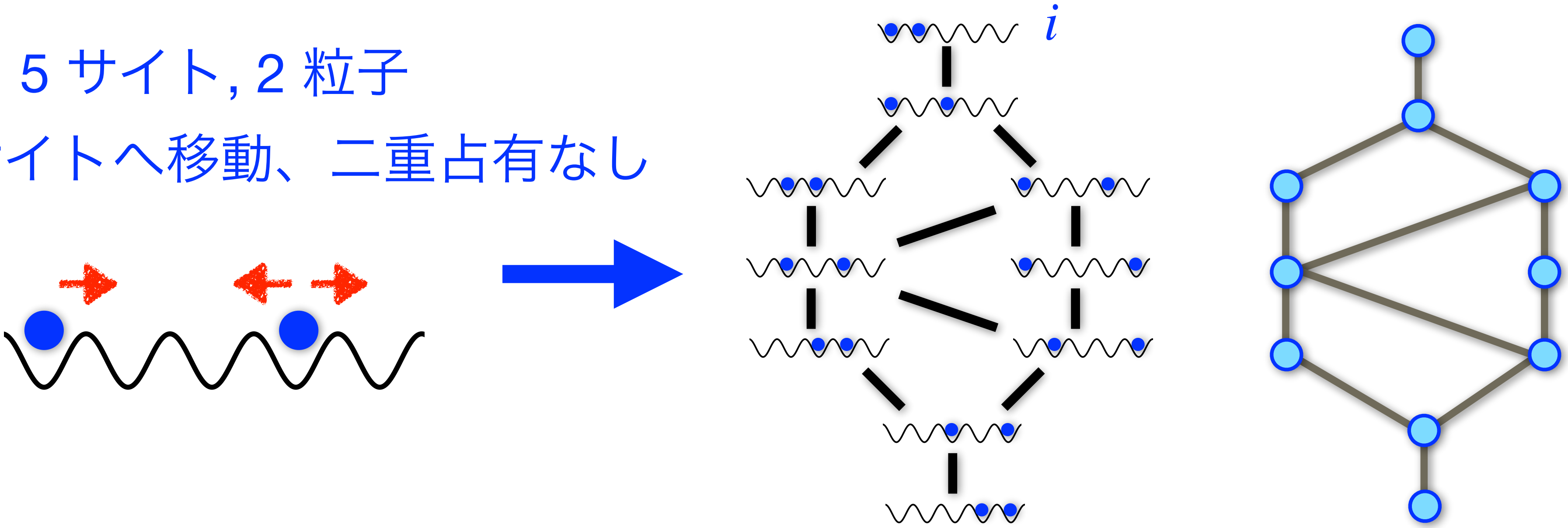
離散的な系でのアイデア

任意の離散的な多体系を取り扱うために、

グラフ構造 $G = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ へとマップする

（例） 5 サイト, 2 粒子

近接サイトへ移動、二重占有なし

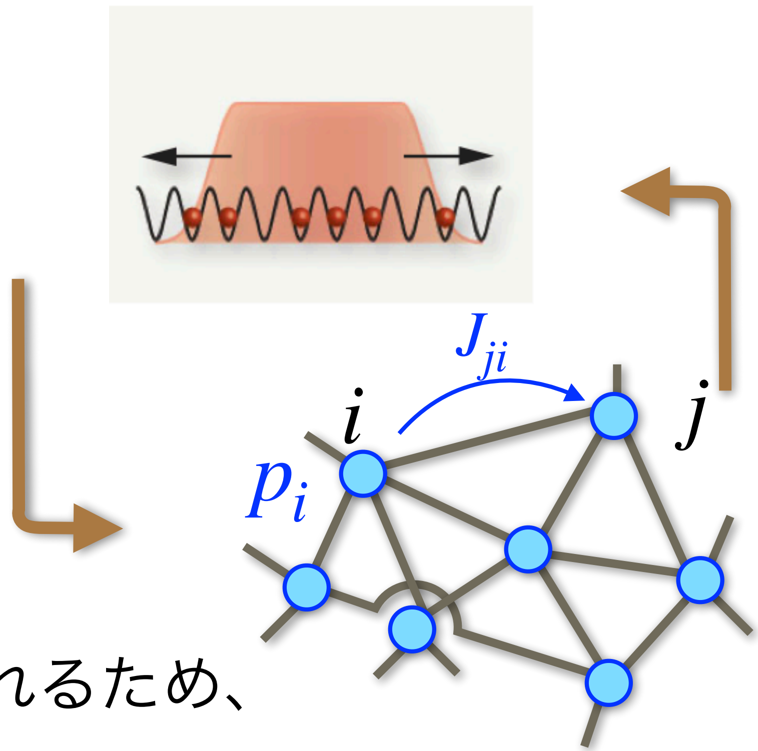


R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

離散的な系でのアイデア

任意の離散的な多体系を取り扱うために、
グラフ構造 $G = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ へとマップする

バーテックス: $i \in \mathscr{V}$ （状態の基底）
エッジ: $i \neq j$ かつ i と j 間の
遷移があれば $(i, j) \in \mathscr{E}$



遷移が局所的に進行するという事実を取り入れるため、
グラフ上の確率分布 $\{p_i\}$ の満たす局所保存則を考える

$$\Rightarrow \frac{dp_i}{dt} = -\sum_{j:(j,i)\in\mathscr{E}} J_{ji}(t)$$

J_{ji} : i から j への確率流
$J_{ji} = -J_{ij}$

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

確率流を用いた速度限界

離散的な確率の局所保存則 $\dfrac{dp_i}{dt} = -\sum_{j:(j,i)\in\mathcal{E}} J_{ji}(t)$ を用いる

$$\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt} = \sum_i A_i \frac{dp_i}{dt} = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} A_i J_{ji}(t) = -\frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} (A_i - A_j) J_{ji}(t)$$

Hölder
不等式

$$\boxed{\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \le \frac{1}{2}\max_{(i,j)\in\mathcal{E}} |A_i - A_j| \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} |J_{ji}(t)|}$$

または

Cauchy-Schwarz
不等式

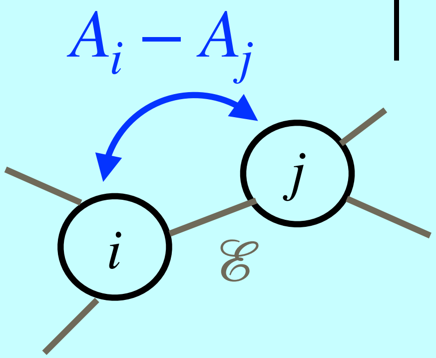
$$\boxed{\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \le \sqrt{\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} r_{ij}|A_i - A_j|^2 \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \frac{|J_{ji}(t)|^2}{r_{ij}}}} \quad r_{ij} > 0$$

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

確率流を用いた速度限界

離散的な確率の局所保存則 $\frac{dp_i}{dt} = -\sum J_{ji}(t)$ を用いる

$$\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \le \frac{1}{2} \underbrace{\max_{(i,j)\in\mathscr{E}} |A_i - A_j|}_{=:\ \|\nabla A\|_\infty} \sum_{(i,j)\in\mathscr{E}} |J_{ji}(t)|$$



エッジ$\mathscr{E}$により定義された A の離散的勾配

典型的な巨視的遷移においては $\|\nabla A\|_\infty \ll \Delta A$

発散しない有用な速度限界が得られる

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

巨視的な離散的量子遷移

一般的な量子ダイナミクス $i\hbar \frac{d\vec{\psi}}{dt} = H\vec{\psi}$ $\quad \vec{\psi} = \{\psi_i\}_{i=1}^D \in \mathbb{C}^D$

状態の基底$\{i\}$に関して観測を行ったとき、 i への確率は $p_i(t) = |\psi_i|^2$

$$\to \frac{dp_i}{dt} = - \sum_{j:(j,i)\in\mathscr{E}} J_{ji}(t)$$

$J_{ji} = i(\psi_i^* H_{ij}\psi_j - \psi_j^* H_{ji}\psi_i)/\hbar$: 確率流

H_{ij} : Hの行列要素の(i,j)成分

$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^{D} A_i p_i(t)$という期待値を持つ物理量に対し

$$\boxed{\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \le \frac{\|\nabla A\|_\infty}{\hbar}\sqrt{C_H^2 - E_{\rm trans}^2}}$$

*遷移エネルギー（巨視的な物理量）

$$E_{\rm trans} = \left\langle \sum_{(i,j)\in\mathscr{E}} H_{ij} \right\rangle$$

*遷移の強さ（H から簡単に分かる）

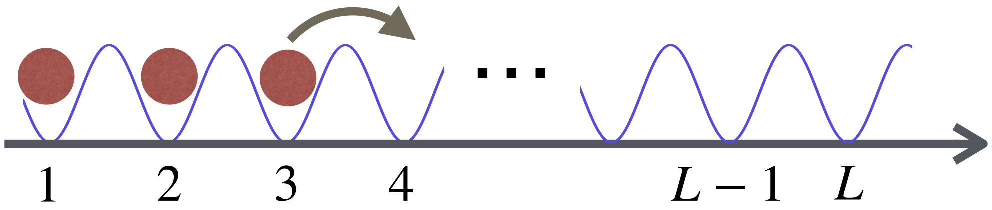
$$C_H := \max_{i\in\mathscr{V}} \sum_{j:(j,i)\in\mathscr{E}} |H_{ij}|$$

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

巨視的な量子遷移と速度限界

$$\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{dt}\right| \leq \frac{\|\nabla A\|_\infty}{\hbar}\sqrt{C_H^2 - E_{\mathrm{trans}}^2}$$

L サイト系、M原子の輸送



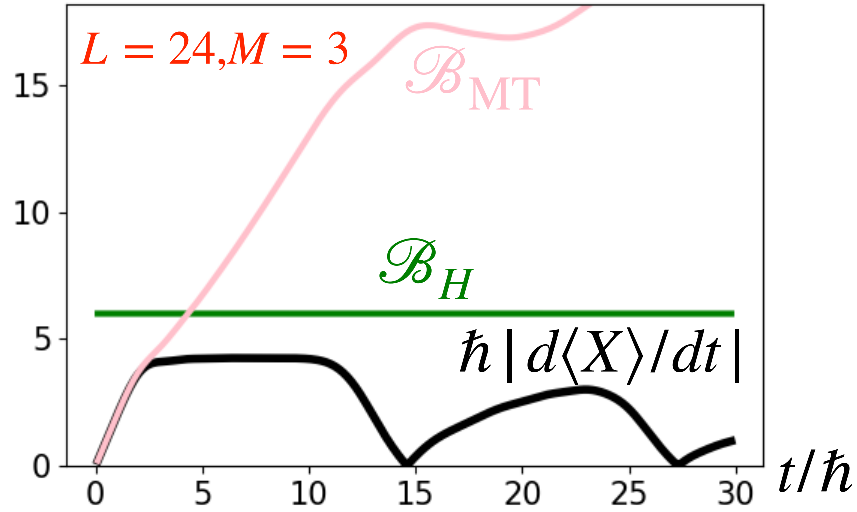
***遷移エネルギーE_{trans}が遷移速度を抑制する** Mandelstam-Tamm限界：ΔE

***有用な速度限界** ← 巨視的な距離の遷移に対し$\|\nabla A\|_\infty \ll \Delta A$

（例）ホッピングのレートKを持つM原子の量子多体系での平均変位 X

我々の上限

$$\hbar\left|\frac{d\langle X(t)\rangle}{dt}\right| \leq \mathscr{B}_H = \sqrt{(2K)^2 - (E_{\mathrm{trans}}/M)^2}$$
$$\ll \mathscr{B}_{\mathrm{MT}} = 2\Delta X \Delta E$$



R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

巨視的な量子遷移と速度限界

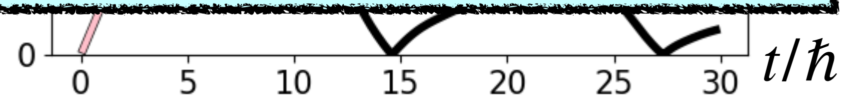
$$\left|\frac{d\langle A(t)\rangle}{\quad}\right| \leq \frac{\|\nabla A\|_\infty}{\quad}\sqrt{C^2 - F^2}$$

L サイト系、M原子の輸送

Remark 1.
連続系と同様、揺らぎ（量子コヒーレンス）に対する
速度限界や、分布のテールに関する不等式も導ける

Remark 2.
連続系と同様、巨視的遷移に有効な
熱力学的速度限界も導ける

最適輸送との関係：Vuさん、吉村さんの講演



R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).

まとめ

人工量子系の発展により、非平衡量子統計力学は
近年の量子物理学のフロンティアとなっている

確率の局所保存則を用いて、巨視的な遷移に対して有用な
速度限界を物理量の勾配と確率流によって導いた

量子系では、速度限界は運動エネルギー（連続系）や
遷移エネルギー（離散系）を用いて表される
また、平均速度を超えて、揺らぎ等に関する不等式も導ける

R. Hamazaki, PRX Quantum 3 (2), 020319 (2022).